

حل هذه المعادلة العام هو :

$$z(x, y, t) = (A \sin ckt + B \cos ckt)(C \sin k_1 x + D \sin k_1 x)(E \sin k_2 y + F \cos k_2 y)$$

إن أي جزء من الغشاء المستخدم يمكن أن يهتز ما عدا النقاط الواقعة على حدوده المقيدة بإحكام لذلك تكون الإزاحة المستعرضة $z(x, y, t)$ في أي نقطة حدودية تساوي صفر دائما وعلى تكون الشروط الحدودية لهذا الغشاء هي :

$$1- \text{ عند الحد } OP \text{ } z(0, y, t) = 0, \quad 2- \text{ عند الحد } RQ \text{ } z(a, y, t) = 0$$

$$3- \text{ عند الحد } OR \text{ } z(x, 0, t) = 0, \quad 4- \text{ عند الحد } PQ \text{ } z(x, b, t) = 0$$

نطبق الشرط الحدودي الأول على الحل العام فنحصل على :

$$z(0, y, t) = (A \sin ckt + B \cos ckt)D.(E \sin k_2 y + F \cos k_2 y) = 0$$

ومنها نجد إن $D=0$

نطبق الشرط الحدودي الثاني على الحل العام فنحصل على :

$$z(a, y, t) = (A \sin ckt + B \cos ckt)C \sin k_1 a.(E \sin k_2 y + F \cos k_2 y) = 0$$

ومنها نجد إن $C=0$ وهذا لا يمكن لأن الحل العام يختفي ويصبح مساويا للصفر أو

$$\sin k_1 a = 0$$

$$k_1 a = m\pi$$

أي إن

حيث

$$m=1,2,3,\dots$$

نطبق الشرط الحدودي الثالث على الحل العام فنحصل على :

$$z(x, 0, t) = C \sin \frac{m\pi}{a} x (A \sin ckt + B \cos ckt).F = 0$$

ومنها نجد إن $F=0$

نطبق الشرط الحدودي الرابع على الحل العام فنحصل على :

$$z(x, b, t) = C \sin \frac{m\pi}{a} x (A \sin ckt + B \cos ckt).E \sin bk_2 = 0$$

وهذا يعني أما $E=0$ وهذا لا يمكن لأن الحل العام يصبح مساويا للصفر أو

$$\sin bk_2 = 0$$

$$bk_2 = n\pi$$

أي إن

$$n=1,2,3,\dots$$

$$\therefore (A \sin ckt + B \cos ckt) = G \sin (ckt + \theta)$$

$$G = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{B}{A}$$

لذلك نحصل على الحل الخاص الذي يصف نمط الاهتزاز الطبيعي لهذا الغشاء

$$z(x, y, t) = H \sin \frac{m\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{b} y \sin(ckt + \theta)$$

حيث H يمثل سعة الاهتزاز ويساوي حاصل ضرب الكميات (C,E,G)

وان ck يمثل التردد الزاوي للاهتزاز الطبيعي للغشاء ويرمز له w وان (m,n) تمثل نمط الاهتزاز الطبيعي في الغشاء .

إن مرتبة نمط الاهتزاز (m,n) ترتبط مع التردد الزاوي الطبيعي من خلال العلاقة

$$w^2 = \frac{S}{\sigma} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]$$

$$\because w = 2\pi f$$

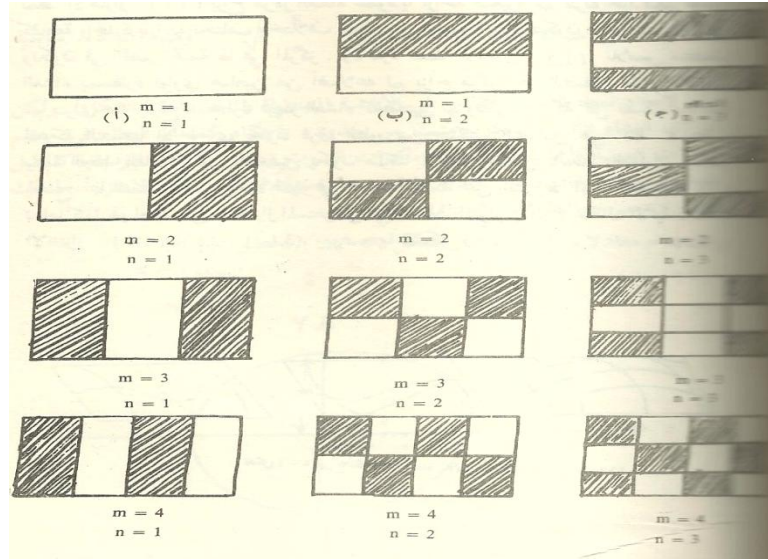
$$\therefore f^2 = \frac{S}{4\pi^2 \sigma} \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]$$

$$\therefore f_{m,n} = \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \frac{S}{4\sigma}}$$

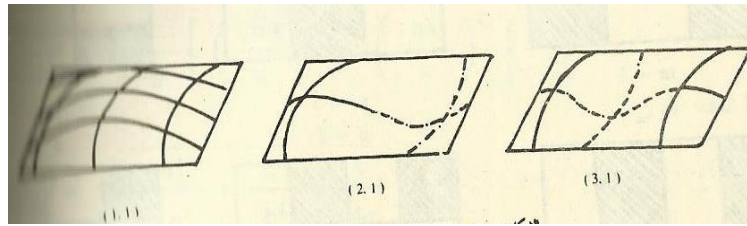
فمثلا إن التردد الأساسي الطبيعي الذي يقابل مرتبة نمط الاهتزاز (1,1) هو

$$f_{1,1} = \sqrt{\left(\frac{1}{a} \right)^2 + \left(\frac{1}{b} \right)^2 \frac{S}{4\sigma}}$$

إن عدد أنماط الاهتزاز للغشاء كثير جدا وفي الحقيقة أن يبلغ نظريا مالا نهاية والشكل (9-3) يبين أنماط الاهتزاز المختلفة من (1,1) إلى (4,3) وان أي نمط من هذه الأنماط قد يحدث منفردا أو مشتركا مع أنماط أخرى .



الشكل (3-9) يبين أنماط الاهتزاز لغشاء مستطيل مثبت من جميع حوافه بإحكام



الشكل (3-10) يبين أنماط الاهتزاز (1,1)، (2,1)، (3,1)

2- الاهتزازات الطبيعية للأغشية الدائرية الشكل

إذا كان الغشاء دائري الشكل ومثبت من حدوده بإحكام كما هو الحال في معظم الحالات العملية كأغشية الميكروفون ومكبرات الصوت وبعض الآلات الموسيقية كالطبل وغيرها فإننا نستخدم الإحداثيات القطبية ، وباستخدام معادلات التحويل من الشكل (3-11) نحصل على :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

وتصبح معادلة الموجة كالآتي :

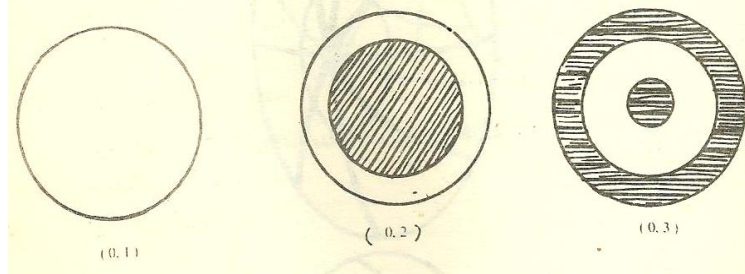
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

فإذا سلطنا قوة دورية توافقية على مركز الغشاء فإن موجات دائرية تتولد وتتقدم من المركز على سطح الغشاء حتى تصل الحدود الدائرية وتتعكس ومن تداخل الموجات الساقطة والمنعكسة يتولد نمط من الاهتزاز في الغشاء ونتيجة للتناظر الدائري حول المركز الهندسي للغشاء فإن $\frac{\partial z}{\partial \theta} = 0$ وبذلك تصبح

المعادلة كالاتي :

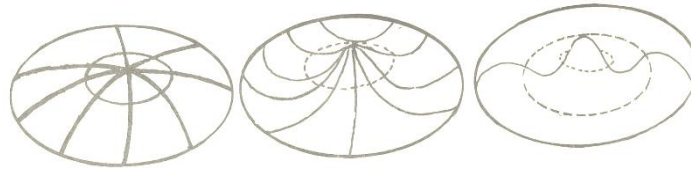
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

إن أشكال بعض أنماط الاهتزاز المتناظرة حول مركز الغشاء مبينة في الشكل أدناه



الشكل (3-11) يبين أنماط الاهتزاز المتناظرة حول مركز الغشاء المرن والمتوتر

وطبيعي هناك أنماط كثيرة من الاهتزاز بعضها متناظر إذا كانت الضربات مسلطة على مركز الغشاء وبعضها غير متناظر إذا كانت الضربات المسلطة بعيدة عن المركز، وتختلف أنماط الاهتزاز في درجة تعقيدات أشكالها تبع اختلاف الشكل الهندسي للغشاء وشروطه الحدودية وطريقة إثارة الاهتزاز. وقد استطاع العالم كلادني (Chladni) أن يبتكر طريقة بسيطة للحصول على أشكال الاهتزازات في الألواح المعدنية يسهل مشاهدتها بالعين المجردة ، وذلك باستخدام لوح معدني بأي شكل كان مثبت على نقطة واحدة أو مسند على ثلاث نقاط أو أكثر ونثر مسحوق خفيف وجاف كالرمل بانتظام على سطح اللوح ويثار الاهتزاز بطريقة ما كإمرار وتر مشدود على حافة اللوح أو النقر الخفيف على نقطة معينة على سطح اللوح ، فيلاحظ إن المسحوق الخفيف يهتز في بعض المواقع بحيث يستقر المسحوق في الخطوط والنقاط العقدية الساكن بينما المناطق المتحركة تخلو من المسحوق . وبذلك تظهر معالم الاهتزاز على سطح اللوح من خلال ملاحظة تفاصيل توزيع المسحوق على اللوح وبهذه الطريقة تمكن كلادني من الحصول على أشكال كثيرة جدت من أنماط الاهتزاز .



الشكل (3-12) يبين الأنماط الآتية الواطنة للاهتزاز المتناظر حول الغشاء الدائري . إن الخطوط المتقطعة تشير إلى

الخطوط العقدية

