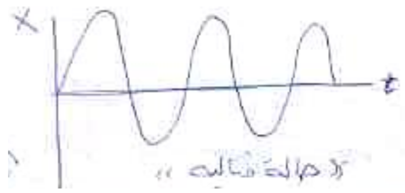
الفصل الثاني
الاهتزاز المضمحل والاهتزاز القسري

يعتبر الاهتزاز الحر والغير مضمحل حالة مثالية للاهتزاز وذلك لأنه ناتج من إزاحة الجسيم قليلا من موضع توازنه ومن ثم تركه يهتز بصورة حرة تحت تأثير قوة الاستعادة الناتجة من خاصية المرونة فقط دون أن يعاني أي مقاومة خارجية أو أي تبديد في الطاقة مهما كان شكله. وسعة الحركة الاهتزازية تبقى ثابتة في هذا النوع من الاهتزاز مما يعني أن الاهتزاز يستمر دون توقف مع مرور الزمن. ومثال لهذا النوع هو الحركة التوافقية البسيطة .

الاهتزاز الحقيقي هو الاهتزاز الذي يعاني شيئا من فقدان الطاقة وتتضاءل سعة حركته الاهتزازية تدريجيا مع مرور الزمن . ولا يوجد أي مهتز حقيقي يستمر على الاهتزاز الحر إلى الأبد ويعرف هذا النوع من الاهتزاز الحقيقي للحالة الواقعية (بالاهتزاز المضمحل)



القوى المسببة لاضمحلال الاهتزاز

إن كل مهتز يجابه نوعا ما من القوى المقاومة لحركته التي تؤدي إلى اضمحلال حركته الاهتزازية تدريجيا نع الزمن وقد يكون مقدار هذه القوى من الكبر ما لا يسمح بحدوث الاهتزاز أصلا ، يمكن وصف القوى المؤدية إلى تبديد الطاقة المصاحبة للاهتزاز والمقاومة لحركة الجسيم المهتز بعامل أو أكثر من عوامل الاضمحلال أهمها:

1- القوى الناتجة من لزوجة المائع الذي يتحرك خلاله الجسيم المهتز

1- الاحتكاك الداخلي بين الجزيئات التي تعاني من حركة نسبية نتيجة الاهتزاز

2- قوى كهربائية مستقرة كتلك الناتجة من الاحتكاك

3- قوى محتثة ناتجة من الحث الكهرومغناطيسي المتولد بسبب اهتزاز الجسم المهتز الذي يحتوي على مواد قابلة للتمغنط قرب مغناطيس طبيعي أو كهربائي

إن احد هذه العوامل موجودة في عملية الاهتزاز وان شغلا يجب أن يصرف للتغلب على هذه القوى وهذا الشغل المصروف يتبدد على شكل حرارة مفقودة إلى الوسط المحيط بالمهتز. ولذلك فان سعة الاهتزاز

تتناقص باستمرار مع الزمن حتى يتوقف المهتز عن الحركة .وهذا التضاؤل في السعة يعرف **بالاضمحلال** أو التبديد في الطاقة وتدعى هذه الحركة **بالحركة التوافقية المضمحلة.**

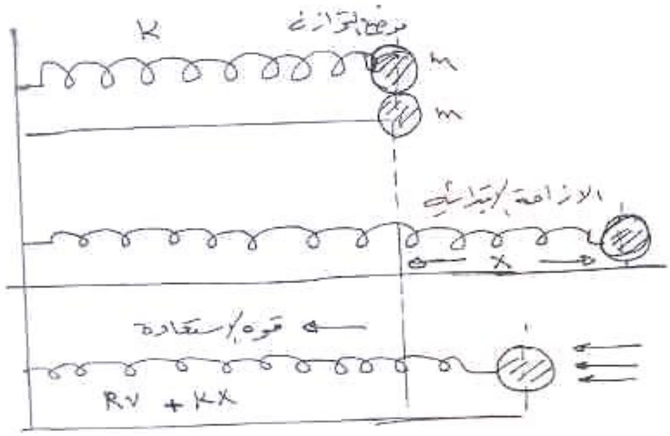
لغرض دراسة هذا النوع من الاهتزاز لابد اخذ كل القوى المسببة لتبديد الحركة الاهتزازية بالاعتبار وتعتمد هذه القوى على عوامل مختلفة مثل الإزاحة ،السرعة ،الإجهاد ،...الخ

إن أكثر العوامل بروزا في إحداث الاضمحلال هو العامل الناتج من مقاومة المائع بسبب لزوجته لحركة الجسيم أو شكله وخواص المانع.

معادلة الحركة التوافقية المضمحلة

عندما تزاح الكتلة m إزاحة صغيرة مقدارها x فان قوة الاستعادة (-kx) ستظهر عندئذ.

وبالمقابل ستظهر قوة المقاومة الناتجة من الاحتكاك أو لزوجة المائع (-Rdx/dt) لذا فان محصلة القوة المؤثرة على الكتلة المتحركة في أي لحظة زمنيا t هي



$$F = -R\frac{dx}{dt} - kx$$

حسب قانون نيوتن الثاني

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -R\frac{dx}{dt} - kx$$

$$\left[m\frac{d^2x}{dt^2} + R\frac{dx}{dt} + kx = 0 \qquad \right] \div m$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{R}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = 0$$

نفرض إن $\frac{R}{m} = 2r$ قيمة عامل الاضمحلال ، $\frac{k}{m} = w_\circ^{\,2}$

$$\therefore \frac{d^2x}{dt^2} + 2r\frac{dx}{dt} + w_\circ^{\,2}x = 0$$

هذه هي المعادلة التفاضلية للحركة المضمحلة وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية

حل معادلة الحركة التوافقية المضمحلة

نفرض إن D

$=\frac{d}{dt} \qquad , D^2 = \frac{d^2}{dt^2}$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2r\frac{dx}{dt} + w_o{}^2x = 0$$

$$D^2x + 2rDx + w_o{}^2x = 0$$

$$(D^2 + 2rD + w_o{}^2)x = 0$$

أما x= 0 وهذا غير ممكن أو

$$D^2 + 2rD + w_o{}^2 = 0$$

يحل بطريقة الدستور

$$D = \frac{-2r \pm \sqrt{4r^2 - 4w_o{}^2}}{2}$$

$$\therefore D = -r \pm \sqrt{r^2 - w_o{}^2}$$

$$Dx = \left(-r + \sqrt{r^2 - w_o{}^2}\right)x$$

$$\frac{dx}{dt} = \left(-r + \sqrt{r^2 - w_o{}^2}\right)x$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x} = \left(-r + \sqrt{r^2 - w_o{}^2}\right)\int dt$$

$\ln x = \left(-r + \sqrt{r^2 - w_o{}^2}\right)t + \ln c$ ثابت التكامل

$$\ln\frac{x}{c} = \left(-r + \sqrt{r^2 - w_o{}^2}\right)t$$

$$\therefore x = Ce^{\left(-r \pm \sqrt{r^2 - w_o{}^2}\right)t}$$

الحل الكامل للمعادلة التفاضلية هي

$$x = C_1e^{\left(-r+\sqrt{r^2-w_o{}^2}\right)t} + C_2e^{\left(-r-\sqrt{r^2-w_o{}^2}\right)t}$$

$$\therefore X = \frac{x_o}{2}e^{-rt}\left[\left(1 + \frac{r}{\sqrt{r^2-w_o{}^2}}\right)e^{\sqrt{r^2-w_o{}^2}\,t} + \left(1 - \frac{r}{\sqrt{r^2-w_o{}^2}}\right)e^{-\sqrt{r^2-w_o{}^2}\,t}\right]$$

هذه المعادلة تأخذ أشكالا مختلفة بالاعتماد على قيمة عامل الاضمحلال (r) فيزيائيا هناك أربع حالات للحركة يعتمد كل منها على قيمة (r) بالنسبة إلى ($w_\circ$) وهي :

الحالة الأولى // انعدام الاضمحلال (عامل الاضمحلال $r = 0$)

وهي الحالة التي تمثل انعدام الاضمحلال أي أن المقاومة التي يعانيها الجسم المهتز R=0 تكون معدومة تماما (لا يوجد احتكاك) أي أنها حركة توافقية بسيطة غير مضمحلة

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w_\circ^2 = 0$$ الاهتزاز الحر

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \therefore \quad x = c\sin(w_\circ t + \theta)$$

حيث c سعة الحركة وتبقى ثابتة مع الزمن

الحالة الثانية // ناقص الاضمحلال

عندما تضمحل سعة اهتزاز النظام ببطء يقال عن النظام بأنه اضمحلال ناقص حيث $\boldsymbol{r} < w_\circ$ اي إن r تكون صغيرة مقارنة مع التردد الزاوي w أي أن :

$$\frac{r}{2m} < \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$(r^2 - w_\circ^2)$ تكون كمية سالبة لذلك تعتبر خيالية

$$\sqrt{r^2 - w_\circ^2} = iw$$

$$X = \frac{x_\circ}{2}e^{-rt}\left[\left(1 + \frac{r}{iw}\right)e^{iwt} + \left(1 - \frac{r}{iw}\right)e^{-iwt}\right]$$

$$X = x_\circ e^{-rt}\left[\left(\frac{e^{iwt}+e^{-iwt}}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{r}{iw}e^{iwt} - \frac{r}{iw}e^{-iwt}\right)\right]$$

$$X = x_\circ e^{-rt}\left[\left(\frac{e^{iwt}+e^{-iwt}}{2}\right) + \frac{r}{iw}\left(\frac{e^{iwt}-e^{-iwt}}{2}\right)\right]\frac{w}{w}$$

$$X = x_\circ e^{-rt}\frac{1}{w}[(w\ coswt) + (r\ sinwt)]$$

نعوض عن $w = A\sin\theta$, $r = A\cos\theta$

$$X = x_{\circ} e^{-rt} \frac{1}{w} [A sin\theta \, coswt + A cos\theta sinwt]$$

$$X = x_{\circ} e^{-rt} \frac{A}{w} \sin (wt + \theta)$$

$$A = \sqrt{r^2 + w^2} \qquad , \quad \theta = \tan^{-1} \frac{w}{r}$$

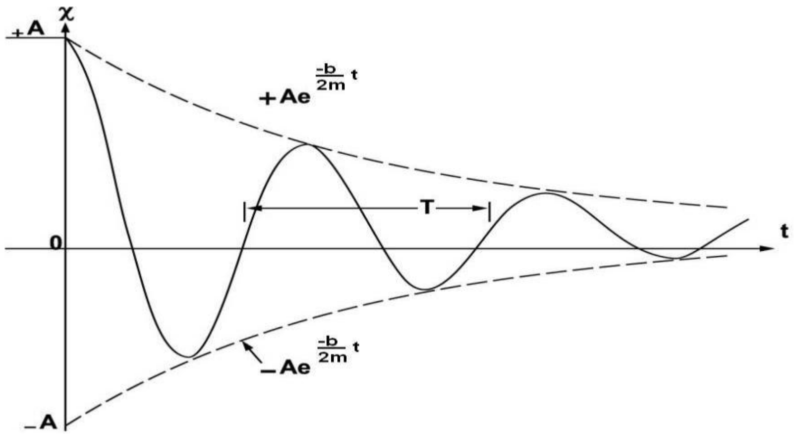
$$\therefore X = Ce^{-rt} \frac{A}{w} \sin (wt + \theta)$$

Ce^{-rt} هي سعة الحركة ، حيث أن $C = 1 - \frac{r^2}{w^2}$

ونلاحظ حدوث مقدار أسي (تدريجي) في السعة مع الزمن (السعة تقل لوجود عامل الاضمحلال بعد فترة من الزمن تنتهي الهزة) .

ترددها الزاوي $w = \sqrt{w^2 - r^2}$ والزمن الدوري هو $T = \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi}{\sqrt{w^2 - r^2}}$

أي أن التردد الزاوي اكبر من التردد الطبيعي



الحالة الثالثة // اضمحلال حرج

عندما تحدث حركة غير اهتزازية في فترة زمنية قصيرة يقال عن النظام بأنه اضمحلال حرج مثل آلية ارتداد الكثير من الأسلحة تمثل حالة الحركة الحرجة $(r^2 = w_{\circ}^2)$ وهي حالة خاصة تمثل الحد الفاصل بين سكونين مختلفين تماما.(في هذه الحالة لا يوجد اهتزاز).

$$r = w \qquad , \sqrt{r^2 - w_{\circ}^2} = 0 \qquad , iw = \sqrt{r^2 - w_{\circ}^2}$$

$$X = \frac{x_{\circ}}{2} e^{-rt} \left[\left(1 + \frac{r}{iw}\right) e^{iwt} + \left(1 - \frac{r}{iw}\right) e^{-iwt} \right]$$

$$X = \frac{x_{\circ}}{2} e^{-rt} \left[\left(1 + \frac{r}{\sqrt{r^2 - w_{\circ}^2}}\right) e^{\left(\sqrt{r^2 - w_{\circ}^2}\right)t} + \left(1 - \frac{r}{\sqrt{r^2 - w_{\circ}^2}}\right) e^{-\left(\sqrt{r^2 - w_{\circ}^2}\right)t} \right]$$

$$X = \frac{x_\circ}{2} e^{-rt}\left[1 + \frac{r}{\sqrt{r^2 - w_\circ^2}} + 1 - \frac{r}{\sqrt{r^2 - w_\circ^2}}\right]$$

$$X = \frac{x_\circ}{2} e^{-rt}(2)$$

$$X = x_\circ e^{-rt}$$

وبهذا تهبط السرعة إلى الصفر ، أي أن الجسيم يرجع بسرعة إلى نقطة التوازن وتسمى (الاضمحلال الحرج).

الحالة الرابعة // زائدة الاضمحلال

عندما تحدث حركة غير اهتزازية ويأخذ النظام وقت طويل حتى يصل إلى موضع توازنه يقال عن النظام بأنه زائد الاضمحلال $r > w_\circ$ ،مثال ذلك كتلة مثبتة في طرف نابض مهتز ومغمور في سائل لزوجته عالية جدا فعندما تصل الكتلة إلى موضع التوازن لن يشاهد الاهتزاز إطلاقا . أي أن المهتز يعاني مقاومة احتكاكية كبيرة وتكون قيمة معامل الاضمحلال (r) كبيرة مقارنة مع التردد الطبيعي$w_\circ$ للمهتز أي أن $r^2 - w_\circ^2$ كمية موجبة أي $\sqrt{r^2 - w_\circ^2}$ كمية حقيقة .

وهذا يعني انه كلما يزداد الزمن t فان e^{rt} تقل وان الكمية $\sqrt{r^2 - w_\circ^2}t$ تقل ولكن e^{-rt} تقل بسرعة فائقة وان x تقل من $x_\circ$ وتصل إلى الصفر مع الزمن . إذن فالحركة هي حركة غير اهتزازية وتسمى زائدة الاضمحلال .

مقاييس الاضمحلال

إن كل المهتزات في الطبيعة تعاني اضمحلال في حركتها ولكن بدرجات متفاوتة وان درجة الاضمحلال لأي مهتز مضمحل يمكن إيجادها من خلال إحدى الكميات :1- التناقص اللوغارتمي 2- معامل النوعية 3- زمن الاسترخاء

التناقص اللوغارتمي // ويعرف بأنه اللوغاريتم الطبيعي للنسبة بين أي سعتين متتاليتين من سعات الاهتزاز المضمحل ويرمز له بالرمز δ ويعبر عنه رياضيا كالآتي

$$\delta = \ln\frac{x_1}{x_2}$$

حيث x_1,x_2 تمثل سعة الاهتزاز في الزمن t_1,t_2 والتي تقاسان على نفس الجانب من موضع التوازن

$$\boldsymbol{\delta = rT}$$

أي انه يعتمد على الزمن الدوري T للاهتزاز المضمحل ومعامل الاضمحلال r ويمكن إيجاد T

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{w^2 - r^2}}$$

$$\therefore \quad \delta = \frac{2\pi r}{\sqrt{w^2 - r^2}}$$

هذه المعادلـة تعطـي قيمـة التنـاقص اللوغـارتمي مهمـا كانـت المقاومـة التـي يجابهها المهتـز فـي حالـة الاهتزاز أي مهما تكن قيمة معامل الاضمحلال r .

وكذلك عندما قيمة r تكون صغيرة جدا مقارنة مع $w_{\circ}$ فعندئذ $w_{\circ} \gg r$

$$\delta = \frac{2\pi r}{w_{\circ}}$$

أي أن التناقص اللوغارتمي يتناسب طرديا مع معامل الاضمحلال r عندما تكون قيمة r صغيرة