الأخطاء في العمليات الحسابية ERRORS IN ARITHMETIC OPERATIONS

لتكن x^* قيمة تقريبية لقيمة حقيقية x. يعرف الخطأ في القيمة التقريبية كالآتي:

$$e_x = x - x^*$$

كما ويسمى في أغلب الأحيان بالخطأ المطلق (Absolute Error) لتمييزه عن الخطأ النسبي (Relative Error). يعرفالخطأ النسبي δ_* بحاصل قسمة الخطأ المطلق على القيمة المضبوطة، أي:

$$\delta_x = \frac{e_x}{x}$$

وفي الغالب تكون قيمة x غير معلومة لذلك تستبدل قيمة **x** في التعريف السابق بالقيمة التقريبية x^*فنحصل على:

$$\delta_x \approx \frac{e_x}{x^*}$$

من الواضح بأن الاختلاف بين الخطأ المطلق والنسبي يزول عندما تكون الأعداد قريبة من 1 ويتميز أكثر كلما ابتعدت من 1.

مثال 1:

لتكن 0.0007 قيمة تقريبية للقيمة المضبوطة 0.0008 أي إن:

X^*=0.0007, X=0.0008,

فإن الخطأ المطلق يساوي:

$$e_x = x - x^* = 0.0001$$

وهو صغير كما نرى، بينما تكون قيمة الخطأ النسبي:

$$\delta_x = \frac{e_x}{x} = \frac{0.0001}{0.0008} = 0.125$$

أي أن الخطأ النسبي يساوي 12.5% وهو كبير مقارنة بالخطأ المطلق وهذا يحدث عادة عندما تكون قيمة **x** صغيرة.

مثال 2:

ليكن **$x=10000$ ،$x^*=9950$** فإن:

$e_x= x-x^*=50$

بينما يكون:

$$\boldsymbol{\delta_x = \frac{e_x}{x} = \frac{50}{10000} = 0.005}$$

أي إن الخطأ النسبي يساوي 0.5% وهو صغير مقارنة مع الخطأ المطلق.

لتكن x^*، y^* قيمتين تقريبيتين للعددين x، y بخطأ مطلق e_x، e_y وخطأ نسبي $\boldsymbol{\delta_x}$، $\boldsymbol{\delta_y}$ على التوالي، فيما يأتي نعطي تحليلاً للخطأ المطلق والنسبي في ناتج كل عملية من العمليات الحسابية الأربع بدلالة الخطأ في القيم التقريبية:

أولاً: عملية الجمع: الخطأ المطلق في حاصل الجمع $x^* + y^*$ يساوي:

$e_{x+y}= (x+y) - (x^*+ y^*) = (x-x^*) + (y- y^*)$

أي إن: **$e_{x+y}= e_x + e_y$**

أما الخطأ النسبي فهو:

$$\boldsymbol{\delta_{x+y} = \frac{e_{x+y}}{x+y} = \frac{1}{x+y}\,(e_x + e_y)}$$

أي إن:

$$\boldsymbol{\delta_{x+y} = \frac{1}{x+y}\,(x\delta_x + y\delta_y)}$$

ثانياً: عملية الطرح: بطريقة مشابهة نحصل على:

$$\boldsymbol{e_{x-y} = e_x - e_y}$$

$$\boldsymbol{\delta_{x-y} = \frac{1}{x-y}\,(x\delta_x - y\delta_y)}$$

ثالثاً: عملية الضرب :في هذه الحالة لدينا:

$$\boldsymbol{e_{xy} = xy - x^* y^*}$$

$$\boldsymbol{= xy - (x - e_x)(y - e_y)}$$

$$= xe_y + ye_x - e_x e_y$$

فإذا افترضنا بأن الأخطاء صغيرةبالنسبة إلى القيم التقريبية. يمكننا إهمال الحد في حاصل ضرب الخطأين لنحصل على:

$$e_{xy} = xe_y + ye_x$$

وبتقسيم طرفي المعادلة السابقة علىxy نحصل على:

$$\delta_{xy} = \delta_x + \delta_y$$

رابعاً: عملية القسمة: من تعريف الخطأ المطلق يكون حاصل قسمة القيمتين التقريبيتين:

$$e_{\frac{x}{y}} = \frac{x}{y} - \frac{x^*}{y^*}$$

$$\frac{x^*}{y^*} = \frac{x - e_x}{y - e_y} = \frac{x - e_x}{y} \cdot \frac{1}{1 - \frac{e_y}{y}}$$

وحيث أن العامل الثاني هو عبارة عن مجموع المتسلسلة الهندسية:

$$1 + \frac{e_y}{y} + \left(\frac{e_y}{y}\right)^2 + \left(\frac{e_y}{y}\right)^3 + \cdots$$

يكون:

$$\frac{x^*}{y^*} = \left(\frac{x - e_x}{y}\right)\left(1 + \frac{e_y}{y} + \left(\frac{e_y}{y}\right)^2 + \cdots\right)$$

وبإهمال الحدود التي تحوي حاصل ضرب خطأين أو أكثر، نحصل على الخطأ المطلق في ناتج القسمة:

$$e_{\frac{x}{y}} = \frac{x}{y}\left(\frac{e_x}{x} - \frac{e_y}{y}\right)$$

ومن تعريف الخطأ النسبي نحصل على:

$$\delta_{\frac{x}{y}} = \delta_x - \delta_y$$

مثال:ليكن 3.68 و 2.133 عددين مدورين إلى الرقم الأخير لكل منهما. المطلوب إيجاد الخطأ المطلق والخطأ النسبي في حاصل ضرب العددين.

ليكن $x^*=3.68$، $y^*=2.133$ إذاً $x^* y^*=7.84944$

إذاً الحد الأعلى للخطأ لكلا العددين هو $|e_x| \leq 0.005, |e_y| \leq 0.0005$

$$e_{xy} = x^* e_y + y^* e_x$$

$$\leq 3.68 \times 0.0005 + 2.133 \times 0.005$$

$$\approx 0.013$$

أما الخطأ النسبي فيمكن أن نحدده كما يأتي:

$$\left|\boldsymbol{\delta_{xy}}\right| = \frac{\left|\boldsymbol{e_{xy}}\right|}{|\boldsymbol{x^* y^*}|}$$

$$\leq \frac{\mathbf{0.013}}{\mathbf{7.849}} = \mathbf{0.0016}$$

واجب: جد الحدود العليا المحتملة للخطأ المطلق والخطأ النسبي والنسبة المئوية للخطأ لكل من الأعداد التالية على فرض أن هذه الأعداد 1. مدورة 2. مقطوعة:

أ. 19.80x2.57
ب. 19.80/2.57
ت. 2.577-5.20
ث. 2.57+5.20