التحليل العددي NUMERICAL ANALYSIS

في حياتنا العملية ليس من الضرورة اعتماد قيم مضبوطة دائماً لحل مسألة رياضية أو هندسية أو أية مشكلة في حقل من الحقول العلمية، بل يمكن الاستعانة بقيم تقريبية لذلك. إن وسائل إيجاد هذه الحلول التقريبية تسمى بالخوارزميات نسبة إلى العالم العربي الخوارزمي الذي ألف أول كتاب في الجبر والمقابلة ووضع فيه المبادئ الأساسية لهذا الموضوع.

إن معظم الخوارزميات المصممة لحل مسألة معينة، تسمح بإيجاد الحل بأية دقة مطلوبة باستخدام عدد محدود من الخطوات وهذه الحلول تسمى بالحلول العددية (Numerical Solutions). أما الموضوع المتعلق بدراسة الطرق المستخدمة في إيجاد الحلول العددية والنظريات المتعلقة بها فيسمى بالتحليل العددي (Numerical Analysis).

مصادر الأخطاء RESOURCES OF ERRORS

بما أن الحل العددي لمسألة ما يكون عادة قيمة تقريبية للحل المضبوط لتلك المسألة، لذا تكون هذه القيمة محملة بأخطاء من المهم قياسها لمعرفة دقة الحل العددي. ولأجل تقليل الخطأ في الحل العددي علينا معرفة المصادر المسببة لهذا الخطأ والسيطرة عليه. هذه الأخطاء يمكن أن تصنف كالآتي:

أولاً: أخطاء الصياغة Formulation Error

عندما يراد تحليل مشكلة معينة بطريقة رياضية، غالباً ما نأخذ نموذجاً مبسطاً يصف المشكلة الأساسية. أي قد نهمل بعض العوامل والمؤثرات إذا رأينا بأنها تبسط النموذج وفي نفس الوقت لا تؤثر على المظهر الأساسي للمشكلة. إن النتائج التي نحصل عليها من النموذج المبسط هذا عادة تكون محملة بأخطاء تسمى بأخطاء الصياغة.

على سبيل المثال وصف أينشتاين العلاقة بين تعجيل جسم متحرك والقوة المؤثرة عليه بالنموذج الرياضي:

$$f = \frac{d}{dt}(mv)$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

حيث ترمز:

f للقوة، **m_0** كتلة الجسم في حالة السكون، **v** سرعة الجسم، **c** سرعة الضوء. ولما كانت قيمة **v^2** صغيرة جداً بالنسبة إلى **c^2** يمكن تبسيط النموذج إلى:

$$\boldsymbol{f = \frac{d}{dt}\,(m_0\,v) = m_0 a}$$

حيث يرمز **a** لتعجيل الجسم.

ثانياً: الأخطاء الصلبية Inherent Errors

في مختلف المسائل العلمية يتم الحصول على البيانات **(data)** الخاصة بالمسألة بالملاحظة أو القياس، والدقة في هاتين الحالتين محدودة، أي إن البيانات تعاني من الأخطاء أساساً (أي قبل البدء باستخدام خوارزمية معينة لإيجاد الحل التقريبي للمسألة). وهذا النوع من الأخطاء يسمى بالأخطاء الصلبية.

وهذه التسمية تطلق أيضاً على الأخطاء في البيانات غير النسبية (مثل $\sqrt{\square}$ ، π، e) حيث لا يمكن تمثيلها بشكل مضبوط بل تمثل بأعداد تقريبية لها.

ثالثاً: أخطاء التدوير والقطع Rounding and Chopping

إن واحداً من أهم مصادر الأخطاء هو استعمال الأعداد المدورة بدلاً من المضبوطة. على سبيل المثال العددان 0.045651 و9033 يتم تدويرهما إلى العددين 0.0457، 9030 على التوالي عندما نريد أن نستخدم ثلاثة أرقام مميزة فقط. هذا النوع من الأخطاء يسمى بخطأ التدوير.

إن الآلات الحاسبة الإلكترونية لا تدور الأعداد عادة وإنما تقطعها. على سبيل المثال فهي تحول العددين 0.045651، 9033 إلى 0.0456، 9030 على التوالي في حالة استخدام ثلاثة أرقام مميزة. هذا النوع من الأخطاء يسمى بخطأ القطع وقيمته في معظم الحالات أكبر من قيمة خطأ التدوير.

رابعاً: أخطاء البتر Truncation Errors

عندما تكون لدينا دالة **f** معرفة على شكل متسلسلة غير منتهية من الحدود فإن قيمة **f(x)** لا يمكن احتسابها باستخدام جميع حدود المتسلسلة، بل نتوقف بعد حساب عدد محدود من الحدود. هذا التوقف يسبب خطأ في قيمة **f(x)** (يساوي مجموع الحدود المحدودة) ويسمى بخطأ البتر.

على سبيل المثال لنفترض أن الدالة **f** معرفة كما يأتي:

F(x)=1-cos x.

فتكون متسلسلة تيلر للدالة F حول النقطة x=0:

$$\boldsymbol{f} = \frac{\boldsymbol{x^2}}{\mathbf{2!}} - \frac{\boldsymbol{x^4}}{\mathbf{4!}} + \frac{\boldsymbol{x^6}}{\mathbf{6!}} - \cdots$$

وإذا احتسبنا قيمة **f(a)** من الحدود الثلاثة الأولى فإن خطأ البتر في الناتج يساوي:

$$\boldsymbol{T} = -\frac{\boldsymbol{x^8}}{\mathbf{8!}} + \frac{\boldsymbol{x^{10}}}{\mathbf{10!}} - \frac{\boldsymbol{x^{12}}}{\mathbf{12}} + \cdots$$

وهو عبارة عن سلسلة غير منتهية وفي أغلب الأحيان لايمكن حسابه تماماً ولكن يمكن أن نجد حداً أعلى له.

خامساً: الخطأ المتراكم Accumulated Error

بعض الطرق العددية مثل الحلول العددية للمعادلات التفاضلية تتضمن تكراراً لمجموعة من العمليات الحسابية لخطوات متعاقبة. الخطأ في كل خطوة يزداد لاعتماد الحسابات على القيم التقريبية المحسوبة في الخطوات السابقة مما يسبب بالنتيجة خطأ يسمى بالخطأ المتراكم.

تمثيل الأعداد

يمكن تمثيل الأعداد بصورة عامة بعدة طرق وذلك تبعاً للنظام المتبع. فقد استخدم البابليون الأساس 60 للتعبير عن الأعداد. وهناك حضارات أخرى اعتمدت أساسات أخرى مثل 12 و 20 في الحاسبات الإلكترونية يستخدم الأساس 2 لتمثيل الأعداد.

نظام العد العشري:

وهو النظام المستخدم حاليا في جميع أرجاء العالم والسبب في انتشار النظام العشري هو وجود أصابع اليد العشرة. إن اكتشاف الإنسان للنظام العشري وتطويره بشكله الحالي المألوف بعد إضافة الصفر إليه وإعطاء أهمية لموقع المرتبة المكانية للرقم أثر بالغ في تطور الرياضيات والعلوم التي تعتمد عليها وأصبحت عملية الطرح والضرب والقسمة لا تتطلب مجهود فكري كبير. وكانت سهولة النظام العشري من العوامل المساعدة لقيام الإنسان باختراع آلات ميكانيكية تستعمل للعمليات الحسابية.

والنظام العشري يستخدم عشرة رموز وهي (0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9) ويعتمد على الأساس 10.

أن أي عدد حقيقي في النظام العشري يمكن أن يكتب على شكل متسلسلة أساسها 10 ومعاملاتها أعداد صحيحة تتراوح قيمها بين 0 و9 وتسمى الأرقام العشرية. فإذا كان x عدداً حقيقياً موجباً:

$$x = (a_n a_{n-1} \dots a_0 . b_1 b_2 \dots)_{10}$$

أي إن قيمة x تمثل مجموع المتسلسلتين:

الجزء الصحيح الجزء الكسري

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \times 10^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k 10^{-k}$$

من الممكن تعريف أو بناء أنظمة عددية تعتمد على الأساس (2) أو (3) أو (4) أو ...الخ ، ويكون عدد الرموز في أي واحد من هذه الأنظمة يساوي الأساس نفسه.

اسم النظام	الأساس	رموز الأرقام
النظام الثنائي	2	0، 1
النظام الثلاثي	3	0، 1، 2
النظام الرباعي	4	0، 1، 2، 3
النظام الخماسي	5	0، 1، 2، 3، 4
النظام السداسي	6	0، 1، 2، 3، 4، 5
النظام السباعي	7	0، 1، 2، 3، 4، 5، 6
النظام الثماني	8	0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7
النظام التساعي	9	0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8

النظام الثنائي:

النظام الثنائي يعتمد على الأساس (2) والرموز المستخدمة هي (0، 1) فقط والعمليات الحسابية في هذا النظام لا تختلف كثيرا عن المستخدمة في النظام العشري. يمكن تمثيل أي عدد فيه بسلسلة من الرقمين (0، 1) ويكون الترتيب في العد لهذا النظام كالتالي:

0، 1، 10، 11، 100، 101، 110، 111، 1000، 1001، 1010، ...الخ.

0، 1، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 ، 7 ، 8 ، 9 ، 10 ، ...الخ.

أن أي عدد حقيقي في النظام الثنائي يمكن أن يكتب على شكل متسلسلة أساسها 2 ومعاملاتها أعداد صحيحة (فقط 0 ، 1) وتسمى الأرقام الثنائية. فإذا كان x عدداً حقيقياً موجباً:

$$x = (a_n a_{n-1} \dots a_0 . b_1 b_2 \dots)_2$$

أي إن قيمة x تمثل مجموع المتسلسلتين:

$$\overbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k \times 2^k}^{\text{الجزء الصحيح}} + \overbrace{\sum_{k=1}^{\infty} b_k 2^{-k}}^{\text{الجزء الكسري}}$$

النظام السادس عشري

النظام السادس عشري كما هو واضح من اسمه يحوي 16 رقماً وهي:

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 A B C D E F.

حيث أن A=10، B=11، C=12، D=13، E=14، F=15.

أساس النظام السادس عشري هو (16).

أن أي عدد حقيقي في النظام السادس عشري يمكن أن يكتب على شكل متسلسلة أساسها 16 ومعاملاتها أعداد صحيحة (0 الى F) وتسمى الأرقام السادس عشرية. فإذا كان x عدداً حقيقياً موجباً:

$$x = (a_n a_{n-1} \dots a_0 . b_1 b_2 \dots)_{16}$$

أي إن قيمة x تمثل مجموع المتسلسلتين:

$$\overbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k \times 16^k}^{\text{الجزء الصحيح}} + \overbrace{\sum_{k=1}^{\infty} b_k 16^{-k}}^{\text{الجزء الكسري}}$$

النظام الثماني

النظام الثماني كما هو واضح من اسمه يحوي 8 أرقام وهي:

0 1 2 3 4 5 6 7

أساس النظام الثماني هو (8).

أن أي عدد حقيقي في النظام الثماني يمكن أن يكتب على شكل متسلسلة أساسها 2 ومعاملاتها أعداد صحيحة (من 0 الى 8) وتسمى الأرقام الثمانية. فإذا كان x عدداً حقيقياً موجباً:

$$x = (a_n a_{n-1} \dots a_0 . b_1 b_2 \dots)_8$$

أي إن قيمة x تمثل مجموع المتسلسلتين:

الجزء الكسري الجزء الصحيح

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \times 8^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k 8^{-k}$$

تحويل الأعداد من النظام العشري إلى أي نظام

طريقة القسمة على أساس النظام

في هذه الطريقة نقسم العدد المراد تحويله على أساس النظام المراد تحويل العدد إليه باستمرار إلى أن نصل إلى الناتج (0) وبواقي القسمة هي التي تشكل العدد المطلوب.

مثال: حول العدد (224) إلى النظام الثنائي بطريقة القسمة.

العدد	الأساس	الباقي
224	2	0
112	2	0
56	2	0

الآحاد

28	2	0
14	2	0
7	2	1
3	2	1
1	2	1
0		

الرقم الناتج هو $(224)_{10}=(11100000)_2$.

مثال: حول العدد (224) إلى النظام الثماني بطريقة القسمة.

العدد	الأساس	الباقي
224	8	0
28	8	4
3	8	3
0		

الآحاد

الرقم الناتج هو $(224)_{10}=(340)_8$.

مثال: حول العدد (224) إلى النظام السادس عشري بطريقة القسمة.

العدد	الأساس	الباقي
224	16	0
14	16	**E(14)**
0		

الآحاد

الرقم الناتج هو $(\mathbf{224})_{10} = (\mathbf{E0})_{16}$.

مثال: حول العدد العشري (39.125) الى النظام الثنائي.

نقوم بتحويل الجزء الصحيح بالطريقة الاعتيادية

العدد	الأساس	الباقي
39	2	1
19	2	1
9	2	1
4	2	0
2	2	0
1	2	1
0		

الآحاد

أما الجزء الكسري فيتم تحويله بواسطة الضرب المتكرر بأساس النظام وكما يلي:

$0.125 \times 2 = 0.250$ نأخذ الرقم الذي يظهر قبل الفاصلة العشرية وهو 0

0 $0.25 \times 2 = 0.5$

1 $0.5 \times 2 = 1.0$

عند ظهور 0 بعد الفاصلة العشرية نكون قد أنهينا عملية التحويل.

الرقم الناتج هو $(39.125)_{10}=(111001.001)_2$.

مثال: حول العدد العشري (39.125) الى النظام الثماني.

نقوم بتحويل الجزء الصحيح بالطريقة الاعتيادية

العدد	الأساس	الباقي
39	8	7
4	8	4
0		

الآحاد

39 / 8 = 4.875 – 4 =.875 * 8 = 7

أما الجزء الكسري فيتم تحويله بواسطة الضرب المتكرر بأساس النظام وكما يلي:

0.125 x 8 = 1.0 نأخذ الرقم الذي يظهر قبل الفاصلة العشرية وهو 1

عند ظهور 0 بعد الفاصلة العشرية نكون قد أنهينا عملية التحويل.

الرقم الناتج هو $(47.1)_8$=$(39.125)_{10}$.

مثال: حول العدد العشري (39.125) الى النظام الثماني.

نقوم بتحويل الجزء الصحيح بالطريقة الاعتيادية

العدد	الأساس	الباقي
39	16	7
2	16	2
0		

الآحاد

39 / 16 = 2.4375 – 2 = .4375 * 16 = 7

أما الجزء الكسري فيتم تحويله بواسطة الضرب المتكرر بأساس النظام وكما يلي:

$0.125 \times 16 = 2.0$ نأخذ الرقم الذي يظهر قبل الفاصلة العشرية وهو 2

عند ظهور 0 بعد الفاصلة العشرية نكون قد أنهينا عملية التحويل.

الرقم الناتج هو $(39.125)_{10}=(27.2)_{16}$.

واجب:

أ. حول الأعداد العشرية التالية إلى كل من النظام الثنائي والثماني والسادس عشري باستخدام طريقة القسمة:

1. (10.675) 2. (22.892) 3. (101.776) 4. (100) 5. (500) 6. (750) 7. (1000).