

مثال // عربة كتلتها 0.5kg متصلة بسبرنك ثابتته 20N/m يتذبذب على سطح أفقي عديم الاحتكاك 1- احسب الطاقة الكلية للنظام وأقصى سرعة للعربة إذا كانت سعة الحركة 3cm ، 2- ما هي سرعة العربة عندما تكون على بعد 20cm ؟ ، 3- احسب كلا من طاقة الحركية والطاقة الكامنة عندما تكون العربة على بعد 2cm .

$$E = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} (20)(3 * 10^{-2})^2 = 9 * 10^{-3} J$$

1- عندما تكون $x = 0$ فان $U = 0$ وتكون الطاقة الحركية أعظم ما يمكن

$$E = \frac{1}{2} mv_{\max}^2 = 9 * 10^{-3}$$

$$\therefore v_{\max} = \sqrt{\frac{2 * 9 * 10^{-3}}{0.5}} = 0.19 \text{ m/sec}$$

$$v = \pm \sqrt{\frac{k}{m} (A^2 - x^2)} = \pm \sqrt{\frac{20}{0.5} [(0.03)^2 - (0.02)^2]} \therefore v = \pm 0.141 \text{ m/sec}$$

الإشارة الموجبة والسالبة تعني أن العربة ممكن أن تتحرك لليمين ولليسار في تلك اللحظة

2- باستخدام النتائج التي حصلنا عليها في 2 نجد أن

$$K = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} (0.5)(0.141)^2 = 5 * 10^{-3} J$$

$$U = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} (20)(0.02)^2 = 4 * 10^{-3} J$$

لاحظ إن الطاقة الكلية تساوي مجموع الطاقة الحركية والطاقة الكامنة

H.W // ماذا لو أن حركة العربة بدأت الحركة عند $x = 3 \text{ cm}$ وبسرعة ابتدائية $v = 0.1 \text{ m/sec}$. ما هي سعة الحركة وما هو أقصى سرعة للعربة ؟

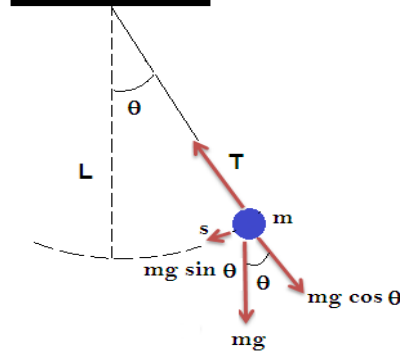
تطبيقات على الحركة التوافقية البسيطة

1- البندول البسيط

يعتبر البندول البسيط احد الأنظمة الميكانيكية التي تعمل حركة دورية. يتكون البندول البسيط من جسم كتلته m معلق بخيط طوله L في احد طرفيه والطرف الآخر مثبت ، كما في الشكل . تحدث الحركة على المستوى الأفقي وتستمر تحت تأثير قوة الجاذبية . القوة المؤثرة على الجسم المعلق هي قوة الشد T التي تنتج في الخيط وقوة الجاذبية الأرضية mg . المركبة المماسية $mg \sin \theta$ تؤثر دائما في الاتجاه الذي يجعل الزاوية $\theta = 0$ وفي عكس الإزاحة التي تحدث للجسم بالنسبة لموضع الاتزان . ولهذا فان

المركبة المماسية تعتبر قوة الاستعادة وبما إن قوة الشد عمودية على الحركة تكاد تكون معدومة ليس لها تأثير لذلك نأخذ فقط القوة المماسية وبتطبيق قانون نيوتن الثاني على الحركة في الاتجاه المماسي .

$$F_t = -mg \sin \theta = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$



حيث s هي موضع الجسم مقاسا بطول المنحني والإشارة السالبة تشير إلى أن القوة المماسية تعمل في اتجاه نقطة الاتزان (والإشارة السالبة تعني اتجاه زيادة القوة يعاكس اتجاه زيادة الزاوية θ) ولأن $x=L\theta$ وحيث أن L ثابتة فالمعادلة تصبح :

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \sin \theta$$

باعتبار إن θ هي الموضع وهي صغيرة جدا فمن الممكن أن نقرب $\sin \theta \approx \theta$ ، وعليه تصبح المعادلة

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{L} \theta$$

وهي تمثل حركة توافقية بسيطة ، وعليه يمكن أن تكتب دالة الزاوية θ

$$\theta = \theta_{\max} \cos(\omega t + \varphi)$$

حيث θ_{\max} هي اكبر موضع زاوي للبندول والتردد الزاوي ω يعطى على النحو التالي:

$$\therefore a = -\omega^2 x$$

$$\therefore \omega^2 = \frac{g}{L} , \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$, \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

ونجد إن الزمن الدوري لحركة البندول البسيط

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad \rightarrow \quad f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}}$$

أي أن الزمن الدوري والتردد يعتمد على طول الخيط والتعجيل ولا يعتمد على الكتلة.

س // يستخدم البندول البسيط في تحديد الوقت ؟ لان زمنه الدوري يعتمد فقط على طول البندول وعلى التعجيل الأرضي . كما يستخدم كأداة لقياس عجلة الجاذبية الأرضية ، وهذه القياسات مهمة جدا لرصد التغيرات في التعجيل الأرضي في مناطق مختلفة على سطح الكرة الأرضية وربما تساعد هذه القياسات في التتقيب عن النفط في بعض الأحيان.

مثال // اقترح العالم هايكنز وحدة للطول تعتمد على فكرة البندول البسيط وهي طول البندول الذي زمنه الدوري 1sec . فكم يبلغ طول هذه الوحدة بالنسبة للمتر ؟

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \quad \therefore L = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{(1)^2 9.8}{4\pi^2} = 0.248 \text{ m}$$

وعليه سيكون المتر اقصر بقليل من طوله الحالي بمقدار ربع طوله الحالي .

H.W // ماذا لو ؟ كان العالم هايكنز في كوكب آخر غير الأرض عندما قدم هذه الفكرة لوحدة الطول . فكم تبلغ قيمة الجاذبية لهذا الكوكب ؟

2- النابض الحزوني

إذا ثبت جسم كتلته m بنابض فانه يتدلى متوازنا مع النابض الذي يكون قد تمدد بمقدار Δl بحيث يكون القوة متجهة نحو الأعلى والتي لا تؤثر على النابض مساوية لثقل الجسم mg حيث k ثابت النابض

$$k \Delta L = mg$$

لنفرض أن الجسم سحب نحو الأسفل مسافة y من وضع التوازن الذي كان عليه ثم ترك ليتذبذب فان محصلة القوة F المؤثرة على الجسم حسب قانون نيوتن الثاني هي :

$$F = ma = m\ddot{y} = mg - k\Delta L - ky$$

$$F = -ky \quad , m\ddot{y} + ky = 0 \quad \text{بتطبيق نيوتن الثاني}$$

$$\ddot{y} + \frac{k}{m}y = 0 \quad \rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}y = 0$$

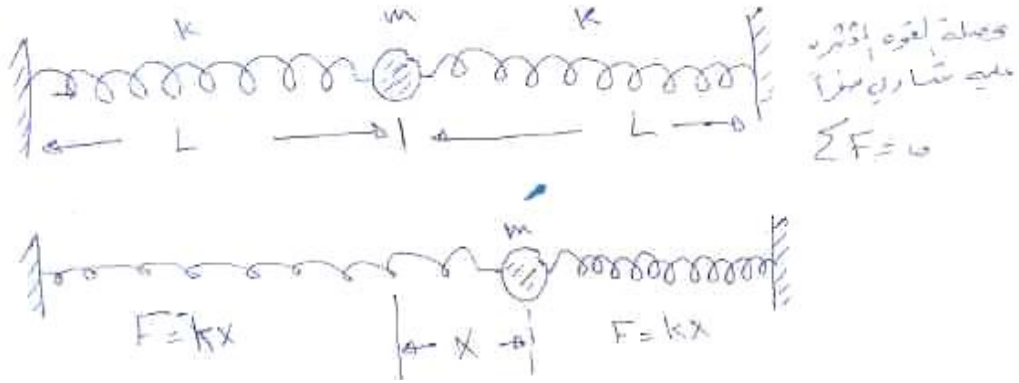
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_o^2 y = 0$$

وهذه هي معادلة الحركة التوافقية البسيطة

$$Y = y_o \sin (\omega t + \theta)$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

الاهتزاز الطولي لجسيم بين نابضين متماثلين



1- نابضين حلزونيين متماثلين تماما لهما نفس الطول L ونفس الثابت k

2- يكون الجسيم موضوعا على سطح أفقي أملس (عدم الاحتكاك)

3- طرفي النابضين الآخرين مثبتين

$$\sum F = -2kx$$

$$ma = -2kx$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -2kx \quad \therefore \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{2k}{m}x$$

تمثل العلاقة الأخيرة معادلة الحركة التوافقية البسيطة لجسيم يتحرك طوليا باتجاه النابضين بتردد زاوي

w_0 حيث :

$$w_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

$$f = \frac{w}{2\pi} \quad , \quad \text{التردد الزاوي}$$

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{2k}} \quad , \quad \text{التردد الطبيعي}$$

تركيب الحلقات التوافقية البسيطة

قاعدة التراكب (التركيب)

عندما تنتقل موجتان أو أكثر خلال نفس الوسط وتلتقيان بنفس النقطة وفي آن واحد، فإن كل موجة

تتصرف باستقلالية تامة عن الأخرى وكأنها الوحيدة في ذلك المكان، سوف ينطبق عليها مبدأ "تراكب الموجات" حيث أن هذا المبدأ هو تأثير مشترك بين موجتين أو أكثر في نفس الوقت. وبالتالي يمكن تعريف مبدأ التراكب : هو طريقة يتم فيها الجمع الجبري للإزاحات (السعات) لموجتين أو أكثر للحصول على الموجة الناتجة ؛ ويطبق هذا المبدأ على جميع أنواع الموجات الميكانيكية والكهرومغناطيسية .

ويعرف أيضا

يمكن لحركتين اهتزازيتين أو موجتين أو أكثر أن تنتقلا في نفس النقطة دون أن تؤثر إحداهما في الأخرى . إن هذه القاعدة تسري على الحركات الموجية الاهتزازية الخطية ، أي الحالات التي تخضع لقانون هوك وضمن حدود المرونة . والهدف الأساسي من قاعة التركيب هو إيجاد محصلة الحركة الناتجة من تأثير الموجات. أي إيجاد التأثير الناتج عن جمعهما جمعا جبريا.وهي وسيلة فعالة تمكنا من تحليل الحركات الموجية والاهتزازية المعقدة إلى مركباتها التوافقية البسيطة . ومثال على ذلك :

- 1- النقاط الأذن أصوات متعددة بترددات مختلفة في نفس الوقت.
- 2- الموجات الضوئية؛ فنحن نرى الأجسام حولنا بوضوح نتيجة الموجات الضوئية الصادرة من هذه الأجسام وفي اتجاهات مختلفة.
- 3- رمي حجرين أو أكثر في مواقع متباعدة عن بعضها في بركة ساكنة.

يمكن التحليل عن هذه القاعدة باستخدام المعادلة التفاضلية للحركة التوافقية البسيطة

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -w_0^2 x \dots \dots (1)$$

$\frac{d^2x}{dt^2}$ يمثل التعجيل الذي يتناسب خطيا مع الإزاحة من موضع x

لحل هذه المعادلة يعني وصفا كاملا للحركة

نفرض الحل الأول (2)..... x =

x₁

$$x_1 = A \sin w_0 t \dots \dots (3)$$

نفرض الحل الثاني (4)..... x=x₂

$$x_2 = B \cos w_0 t \dots \dots (5)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w_0^2 x_1 = 0 \dots \dots (6)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + w_0^2 x_2 = 0 \dots \dots (7)$$

بجمع المعادلتين (6) و(7)

$$\frac{d^2}{dt^2} (x_1 + x_2) w_o^2 (x_1 + x_2) = 0 \dots\dots (8)$$

من هذا نستنتج أن التركيب الخطي لأي حلين يمثل هذه المعادلة يعتبر حلا مناسباً لها أي أن المجموع البسيط لأي حلين يعتبر حلاً ثالثاً للمعادلة الخطية المتجانسة وهذه الخاصية تمثل قاعدة التركيب أي أن " محصلة اهتزازين توافقيين أو أكثر مساوياً لمجموع الاهتزازات المنفردة التي يتأثر بها الجسم.