

الفصل الأول

نظرية الاهتزاز الحر

تعريف عامة

الذبذبة الكاملة : هي حركة الجسم التي يقطع فيها المسار ذهاباً وإياباً.

مدة (نقطة) الذبذبة : هي الزمن اللازم لذبذبة كاملة.

التردد f : هو عدد الذبذبات التي يصنعها الجسم المهتز في وحدة الزمن ويقاس بالهيرتز (ذبذبة/ثانية)

الطول الموجي λ : المسافة الفاصلة بين نقطتين متتاليتين تتحركان بنفس الشكل والاتجاه والطور عندما تكون سرعة الموجة v ثابتة فالموجة تقطع مسافة قيمتها λ بزمان مقداره t حيث $\lambda = v \cdot t$

الإزاحة : هي بعد الجسم عن موضع الاستقرار في أي لحظة يرمز لها بالرمز (x) .

سعة الموجة (الاهتزاز) : هي أقصى إزاحة للجسم المهتز عن موضع الاستقرار ، وسعة الاهتزاز لنقطة ما تعتمد على بعد النقطة عن نقطة الأصل (x) وعلى الزمن (t) من بدء الحركة.

سرعة الموجة : المسافة التي تقطعها الموجة في الثانية الواحدة.

الطور وفرق الطور: هو الموقع النسبي للنقاط المختلفة في الموجات. وتحسب زاوية الطور (φ) لنقطة تبعد أفقياً من الصفر (o) مسافة (x) بالعلاقة: $(\text{أي إن الطور هو النقاط التي يمر بها الجسم أثناء تذبذبه})$

$$\varphi = \frac{2\pi x}{\lambda}$$

فرق الطور : هو الفرق بين طوري موجتين لهما نفس التردد (بالتالي نفس طول الموجة).

الجسم المرن: هو الجسم الذي يستطيع استعادة وضعه أو شكله الأصلي بعد زوال القوة المؤثرة عليه.

خاصية القصور الذاتي: تمثل صفة استمرارية الجسم أو أجزاء الوسط المادي على البقاء في حالة حركية ثابتة ما لم تؤثر عليه قوة خارجية تغير تلك الحالة.

إن كل جسم يمتلك خاصيتي المرونة والقصور الذاتي له القابلية على الاهتزاز إذا ما استثني.

الاهتزاز : هي حركة جسيم ذهاباً وإياباً حول نقطه ثابتة تدعى بموضع التوازن والاستقرار موضع الاستقرار : هي نقطة تتعدم فيها محصلة القوى المؤثرة في الجسيم المهتز وتمثل نقطة سكونه عندما يتوقف عن الاهتزاز

الجسيم : هو أي جسم صلب وصغير لا يتغير حجمه ويتغير كقطعة واحدة

الحركة الدورية : هي حركة جسم مهتز في مسار محدد تتكرر في فترات زمنية منتظمة وقد يكون مسار هذه الحركة بسيطاً أو معقداً مثل الحركة الدائرية وحركة جسم معلق بنابض وحركة الشوكة الرنانة.

الحركة الاهتزازية : هي الحركة الدورية التي تنعكس دوراتها بفترات زمنية منتظمة أي إنها حركة ذهاب وإياب مثل حركة البندول البسيط والجسم المعلق بنابض.

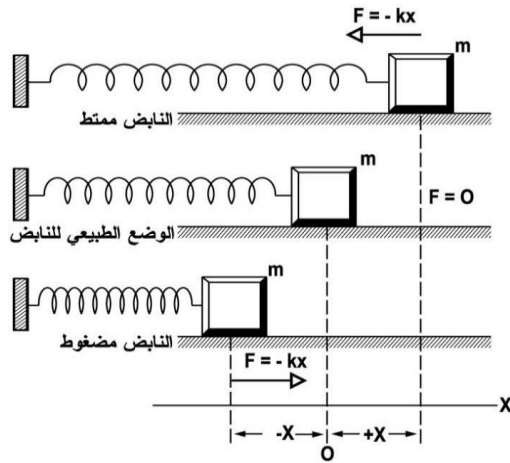
الحركة التوافقية البسيطة : هي حركة جسم على خط مستقيم بتعجيل يتناسب طردياً مع إزاحته عن نقطة ثابتة تمثل موضع توازنه واتجاهه دائماً متجهاً نحو تلك النقطة (أي موضع الاستقرار).

شروط الحركة التوافقية البسيطة

- 1- إن يكون مسار الجسم على خط مستقيم يمر بنقطة ثابتة تمثل موضع استقراره.
- 2- إن مقدار تعجيل الجسم يتناسب طردياً مع مقدار إزاحته عن موضع التوازن ، أي أن هناك قوة تدعى القوة المعيدة تحاول إعادة الجسم لموضعه الأصلي.
- 3- إن اتجاه تعجيل الجسم يكون دائماً متجهاً نحو التوازن .

معادلة الحركة الخطية التوافقية البسيطة

إذا كان لدينا جسم كتلته m يتحرك على سطح أفقي أملس بسبب تأثير نابض مربوط بالجسم كما في الشكل أدناه وقد أزيح الجسم إزاحة أنية طفيفة مقدارها x من موضع التوازن وضمن حدود المرونة فإن القوى التي تحاول إرجاع الجسم إلى موضع توازنه تدعى (قوة المعيدة)



$$F = -kx \quad \dots\dots\dots(1)$$

من قانون هوك

حيث k تمثل ثابت المرونة والإشارة السالبة تشير إلى أن اتجاه القوة يعاكس اتجاه زيادة الإزاحة. وبتطبيق قانون نيوتن الثاني للجسم المتحرك والذي ينص على (محصلة القوى المؤثرة في الجسم ΣF يساوي حاصل ضرب كتلته m في التعجيل a)

$$\Sigma F = ma \dots\dots(2)$$

وبما إن محصلة القوى المؤثرة في الجسم المهتز هي

$$\Sigma F = -kx$$

من المعادلة (2) نحصل على

$$\Sigma F = m \frac{d^2x}{dt^2} \dots\dots\dots(3)$$

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x \dots\dots(4)$$

وإذا فرضنا إن $w_o^2 = \frac{k}{m}$ حيث إن w_o هي مقدار ثابت تمثل فيزيائيا التردد الزاوي للمهتز وبالتالي

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -w_o^2 x \dots\dots(5)$$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية تدعى بمعادلة الحركة التوافقية البسيطة.

حل معادلة الحركة التوافقية البسيطة

لحل معادلة الحركة التوافقية البسيطة يجب إن نفرض معادلة مشابهة لمعادلة الحركة التوافقية البسيطة إذا علمنا الشروط الابتدائية للحركة عند بدء الحركة $t=0$ و $x=0$ أي يبدأ الجسم بالحركة من موضع التوازن.

$$X = A \sin \alpha t \dots\dots\dots(6)$$

حيث A, a يمثل ثوابت اختيارية

$$\frac{dx}{dt} = A\alpha \cos \alpha t \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\alpha^2 \sin \alpha t$$

وبالتعويض عن x وعن $\frac{d^2x}{dt^2}$ في المعادلة (5) ينتج

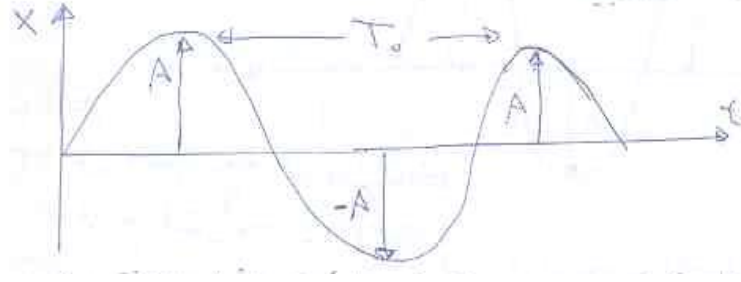
$$-\alpha^2 \sin \alpha t = -w_o^2 A \sin \alpha t$$

وبتساوي الطرفين يكون $\alpha = w_o$ وتكون المعادلة (6) كالآتي:

$$X = A \sin w_o t \dots\dots\dots(7)$$

وتمثل الحل الخاص لمعادلة الحركة التوافقية بتطبيق الشروط الابتدائية إن هذا الحل يشير إلى إن

الحركة الخطية التوافقية هي جيبية يمكن تمثيلها بالمنحنى الجيبي .



حيث إن x تمثل الإزاحة الخطية للجسيم من موضع التوازن في الزمن t

A تمثل سعة الاهتزاز ، ω يمثل التردد الزاوي للمهتز ويساوي $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

T_0 يمثل الزمن الدوري للحركة الخطية التوافقية البسيطة ويساوي $T_0 = \frac{1}{f}$

f يمثل تردد الحركة الخطية التوافقية البسيطة

الزمن الدوري هو الزمن اللازم لإكمال دورة واحدة من $X=A$ إلى $X=-A$ ثم بعد ذلك إلى $X=A$ مرة أخرى.

والحل أعلاه يحتوي على ثابت اختياري واحد لذلك يمثل حل خاص وليس حلا كاملا لمعادلة تفاضلية من الرتبة الثانية حيث من المعلوم إن الحل العام لمثل هذا النوع من المعادلات يجب أن يتضمن ثابتين اختياريين، لذلك هناك حل آخر للمعادلة التفاضلية للمركبة الخطية التوافقية هو

$$X = B \cos b t \dots\dots(8)$$

بأخذ المشتقة الأولى والثانية للمعادلة (8) نحصل على

$$\frac{dx}{dt} = -bB \sin bt \dots\dots\dots(9)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -b^2 B \cos bt \dots\dots\dots(10)$$

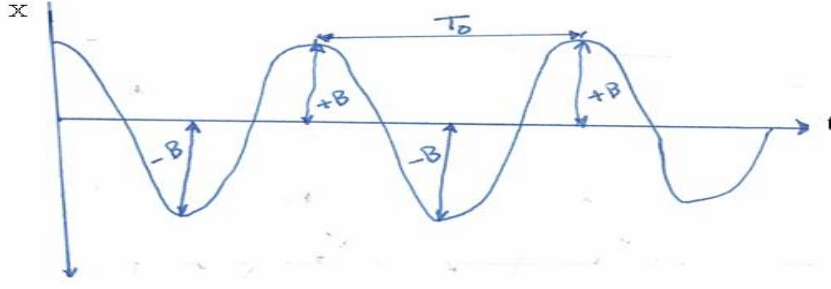
وبتعويض المعادلتين (8,10) في معادلة (5) نحصل على

$$-b^2 B \cos b t = -\omega_0^2 B \cos b t$$

$$\omega_0 = b$$

$$\Rightarrow X = B \cos \omega_0 t \dots\dots\dots(11)$$

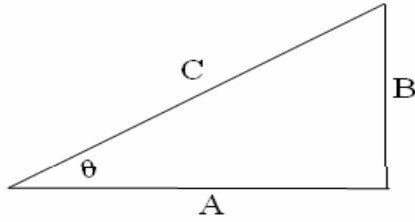
إن هذا الحل يمثل حلا خاصا لان يحتوي على ثابت اختياري واحد ويمكن تمثيله بمنحنى الجيب تمام



ولما كانت المعادلتين (7,11) مستقلتين عن بعضهما البعض وكل منهما يمثل حلا خاصا يختلف عن الآخر لذلك يمكن اعتبار مجموع هذين المعادلتين حلا آخر للمعادلة (5) وبذلك يصبح

$$X(t) = A \sin w_0 t + B \cos w_0 t \dots (12)$$

إن هذا الحل يحتوي على ثابتين A, B لذلك يمكن اعتباره حلا عاما وكاملا للمعادلة التفاضلية للحركة الخطية التوافقية البسيطة، ويمكن تبسيط هذا الحل بفرض أن A, B يمثلان طول ضلعين مثلثين قائمين في مثلث قائم الزاوية طول وتره C كما في الشكل أدناه



$$C^2 = A^2 + B^2$$

حيث إن

وبضرب الطرف الأيمن من المعادلة (12) والقسمة على C نحصل على

$$X(t) = C \left[\frac{A}{C} \sin w_0 t + \frac{B}{C} \cos w_0 t \right]$$

من المثلثات لدينا

$$\sin \theta = \frac{B}{C}, \quad \cos \theta = \frac{A}{C}, \quad \tan \theta = \frac{B}{A}$$

نعوض هذه العلاقات في المعادلة نحصل على

$$X(t) = C [\cos \theta \sin w_0 t + \sin \theta \cos w_0 t]$$

$$X(t) = C \sin(w_0 t + \theta)$$

هذه المعادلة تمثل حلا عام لمعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية لأنها تتضمن ثابتين اختياريين هما C, θ.

X : تمثل الإزاحة الخطية الآتية من موضع التوازن في الزمن t

C: تمثل سعة الاهتزاز وهي أقصى قيمة للإزاحة من موضع التوازن

$$w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ تمثل التردد الزاوي}$$

θ : تمثل الطور الابتدائي لحركة الجسم ، أي تحدد موضع الجسم عندما $t=0$ حيث

$$\theta = \frac{2\pi x}{\lambda} \quad \text{وحدة الطور هي زاوية نصف قطرية}$$

تدل الزاوية $(wt+\theta)$ على الطور الآني أو الطور الذي يحدد حالة الجسم المهتز في أي لحظة .

لو عوضنا عن θ و W بما يساويها فان:

$$X(t) = C \sin(2\pi f t - \frac{2\pi x}{\lambda})$$

$$X(t) = C \sin 2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda})$$

فإذا كان K (ثابت الانتشار أو العدد الموجي) $= \frac{2\pi}{\lambda}$ ، وعليه

معادلة الإزاحة

$$X(t) = C \sin(wt - kx)$$

$$= -w^2 C \sin(wt - kx)$$

كما إن

$$\frac{d^2x}{dt^2}$$

وتوضح معادلة التعجيل إن القوة المؤثرة على جسم ستؤدي إلى إزاحته في اتجاه معاكس وهذا يؤكد إن

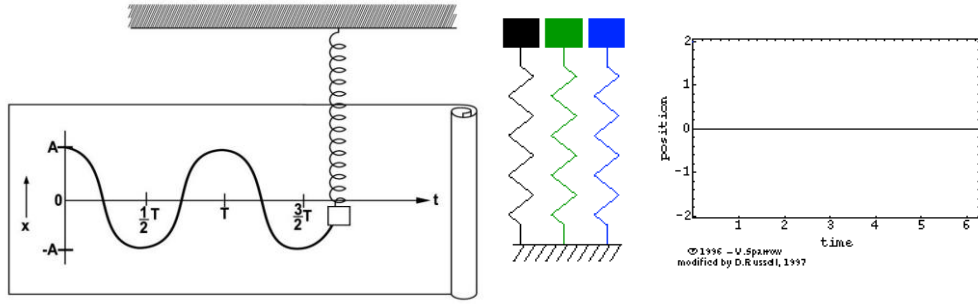
الجسم سيقوم بحركة اهتزازية بسيطة زمنها الدوري هو :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{وتردها} \quad f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

إن نموذج أو منظومة " الكتلة - النابض " تطبق عمليا بكثرة في صناعة بعض (الراسمات والمسجلات

التشابهية) ومخططات القلب والدماغ، وكذلك في تسجيل اهتزازات القشرة الأرضية وبعض بيانات

الأرصاد الجوية حيث يربط فيلم يقوم برسم الإشارة المسجلة كما موضح في الشكل التالي:



مثال // يتدلى جسم كتلته 50gm من نهاية نابض عندما يضاف جسم آخر كتلته 20gm إلى نهاية النابض ، يستطيل النابض 7cm أخرى ، 1- أوجد ثابت النابض 2- إذا ابعث الجسم الآخر عن النابض احسب زمن الدورة.

$$F = -kx \quad , \quad \Rightarrow \quad k = \frac{F}{x} = \frac{ma}{x} = \frac{20 \cdot 980}{7} = 2800 \text{ dy/cm}^2$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad , \quad \Rightarrow \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{50}{2800}} = 2 \cdot 3.14 \cdot 0.13 = 0.816 \text{ sec}$$

السرعة الآنية والتعجيل الآني للمهتز التوافقي البسيط

وجدنا إن الإزاحة الآنية للمهتز التوافقي البسيط هي

$$X = C \sin (w_0 t + \theta) \text{ ----- 1}$$

يمكن إيجاد السرعة الآنية من اشتقاق الإزاحة الآنية بالنسبة للزمن

$$V = \frac{dx}{dt} = C w_0 \cos (w_0 t + \theta) \text{ ----- 2}$$

سعة السرعة هي أقصى قيمة لسرعة المهتز ويرمز لها

$$v_0 = c w_0$$

$$V = V_0 \cos (w_0 t + \theta) \text{ ----- 3}$$

$$\text{----- 4}$$

من المعادلة 1 نجد :

$$\frac{x}{c} = \sin (w_0 t + \theta)$$

ومن المعادلة 2 نجد :

$$\frac{v}{c w_0} = \cos (w_0 t + \theta) \text{ ----- 5}$$

بتربيع طرفي المعادلتين 3,5 نحصل على

$$\left(\frac{x}{c}\right)^2 + \left(\frac{v}{cw_0}\right)^2 = 1 \text{ -----6}$$

حيث إن :

$$[\sin (w_0 t + \theta)]^2 + [\cos (w_0 t + \theta)]^2 = 1$$

$$\Rightarrow V = W_0 \sqrt{C^2 - X^2}$$

يلاحظ من المعادلة أعلاه بأن السرعة الآنية للجسيم المهتز تصبح صفرا عندما يصل أقصى إزاحة من موضع التوازن أي عندما تكون $X=C$ وتكون السرعة في ذروتها عندما يمر الجسيم في نقطة توازنه أي عندما تكون $X=0$.

ويمكن الحصول على التعجيل الآني للجسيم المهتز بأخذ المشتقة الثانية للإزاحة بالنسبة للزمن

$$A = \frac{d^2x}{dt^2} = -cw_0^2 \sin(w_0 t + \theta)$$

حيث إن cw_0^2 يمثل سعة التعجيل أي أقصى قيمة للتعجيل ويرمز له a_0 فتصبح المعادلة

$$a = -a_0 \sin (w_0 t + \theta)$$

إن هذه المعادلة هي نفس معادلة الحركة التوافقية البسيطة فإذا عوضنا بدل a_0 بالمقدار cw_0 وبديل

$$a = -w_0^2 X \quad C \sin (w_0 t + \theta) \text{ بالمقدار } x \text{ ينتج}$$

أي إن التعجيل يساوي صفر عندما يمر الجسم في موضع التوازن ويكون في ذروته عندما يكون الجسم في أقصى إزاحة له.

طاقة المهتز التوافقي البسيط

عندما يهتز الجسيم فإن كلا من الطاقة الحركية والكامنة تتغيران باستمرار ماعدا في نقطتين يختفي احد الشكلين ليتحول كليا إلى الشكل الآخر . ففي أقصى إزاحة للجسيم من موضع التوازن حيث يتوقف الجسيم لحظيا عن الحركة لتتحول الطاقة كليا إلى طاقة كامنة وفي لحظة مرور الجسيم في نقطة التوازن تتحول الطاقة كليا إلى طاقه حركية .

KE : الطاقة الحركية الآنية التي تكتسبها كتلة الجسيم المهتز بفضل سرعته

PE : الطاقة الكامنة الآنية التي يخزنها النابض الحلزوني

تعطى الطاقة الحركية كما يلي علما إن m كتلة الجسيم ، v السرعة الآنية في الزمن t

$$w = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \therefore w^2 = \frac{k}{m} \quad , \quad k = w^2 m$$

$$KE = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2 \sin^2 (\omega t + \varphi)$$

أما الطاقة الكامنة فهي على النحو الآتي:

$$PE = \Delta U = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k A^2 \cos^2 (\omega t + \varphi)$$

$$E = KE + PE$$

وعليه تكون الطاقة الكلية E كما يلي:

$$E = KE + \Delta U = \frac{1}{2} k A^2 [\sin^2 (\omega t + \varphi) + \cos^2 (\omega t + \varphi)]$$

$$E = \frac{1}{2} k A^2$$

وهذا يعني إن الطاقة الكلية الميكانيكية تساوي الطاقة الكامنة القصوى المخزنة في النابض (عند استطالة النابض تكون PE أعظم ما يمكن).

$$v = 0 \quad , \quad k = 0 \quad , \quad E = PE \quad \text{عندما } x = \pm A \text{ فإن}$$

$$E = KE \quad \text{عندما تكون } x = 0 \quad , \quad \text{فإن } PE = 0 \quad , \quad \text{وبالتالي تكون}$$

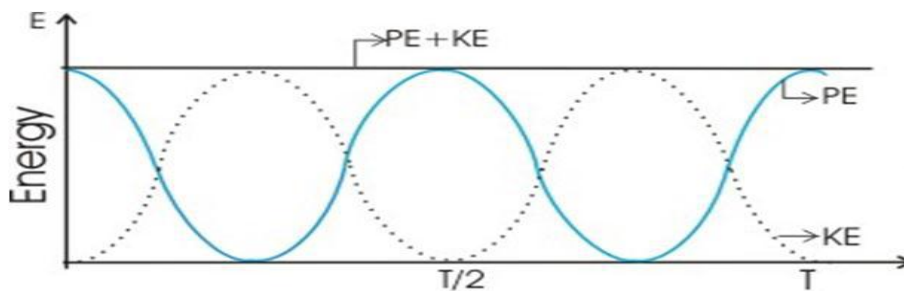
$$E = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \frac{1}{2} k A^2 \quad \text{أي أن}$$

$$v = \pm \sqrt{\frac{k}{m} (A^2 - x^2)}$$

أي أن :

$$v = \pm \sqrt{\omega^2 (A^2 - x^2)}$$

يوضح الشكل التالي تغيرات الطاقة الكامنة مع الطاقة الحركية وهي تغيرات تبادلية بين شكلي الطاقة كما هو متوقع وفق قانون حفظ الطاقة.



طاقة الحركة وطاقة الوضع مع الزمن لمتذبذب توافقي بسيط

مثال // جسيم يهتز بحركة توافقية بسيطة أزيح إزاحة مقدارها 12cm في اللحظة التي تكون فيها سرعته 5cm/sec وأزيح إزاحة مقدارها 5cm في اللحظة التي تكون فيها سرعته 12cm/sec احسب
1- سعته 2- تردده 3- زمنه الدوري

1- السرعة الآنية v لجسيم يتحرك حركة توافقية بسيطة هي :

$$V = \frac{dx}{dt} = \omega_0 \sqrt{c^2 - x^2}$$

بالتعويض بمعطيات الحالة الأولى نحصل

$$v_1 = \omega_0 \sqrt{c^2 - x_1^2}$$

$$5 = \omega_0 \sqrt{c^2 - 12^2} \dots \dots \dots (1)$$

$$v_2 = \omega_0 \sqrt{c^2 - x_2^2} \Rightarrow 12 = \omega_0 \sqrt{c^2 - 5^2} \dots \dots \dots (2)$$

وبقسمة المعادلة 2 على 1 وتربيع المعادلتين نحصل على :

$$\frac{144}{25} = \frac{(c^2 - 25)}{(c^2 - 144)} \Rightarrow c = 13cm$$

نعوض قيمة c في المعادلة 1 أو 2

$$5 = \omega_0 \sqrt{13^2 - 12^2} \Rightarrow 5 = \omega_0 \sqrt{169 - 144} \quad 5 = \omega_0 \sqrt{25}$$

$$\omega = 1$$

زاوية نصف قطرية لكل ثانية

2- من العلاقة

$$w = 2 \pi f \quad \therefore f = \frac{1}{2 \pi} Hz$$

3- من العلاقة

$$T = 2 \pi \quad \therefore T = 6.28 \text{ sec}$$

مثال // كتلة مقدارها 200g مربوطة بسبرنك ثابت القوة له 5N/m إذا كانت تبعد مسافة قدرها 5cm من نقطة الاتزان ، ثم تركت تتذبذب بحرية أفقيا على سطح أملس . 1- أوجد الزمن الدوري للحركة. 2-

السرعة القصوى للحركة . 3- ما هو أقصى تعجيل (تسارع) للكتلة. 4- عبر عن الموقع والسرعة والتعجيل كدوال للزمن.

-1

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{5}{200 \times 10^{-3}}} = 5 \text{ rad/sec}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{5} = 1.26 \text{ sec}$$

-2

$$v_{\max} = \omega A = 5 * 0.05 = 0.25 \text{ m/sec}$$

-3

$$a_{\max} = \omega^2 A = (5)^2 * 0.05 = 1.25 \text{ m/sec}^2$$

4- لحساب ثابت الطور نستخدم الشروط الابتدائية للحركة حيث $x=A$ و $t=0$ ، $\phi=0$ وبالتعويض بالمعادلة العامة نحصل على $x(0)=A \cos \phi = A$ لذا تكون المعادلة

$$x = A. \cos \omega t = 0.05 \cos 5t$$

$$v = -\omega.A. \sin \omega t = -0.25 \sin 5t$$

$$a = -\omega^2.A. \cos \omega t = -1.25 \cos 5t$$