

تركيب حركتين توافقيتين بسيطتين في نفس الاتجاه

لنفرض إن لدينا جسيم يخضع آنيا لحركتين توافقيتين بسيطتين لهما نفس التردد على امتداد المحور السيني x وتمثل الحركة التوافقية البسيطة الأولى بالمعادلة:

$$x_1 = a_1 \sin(\omega t + \theta_1) \dots \dots (1)$$

وتمثل الحركة التوافقية البسيطة الثانية بالمعادلة :

$$x_2 = a_2 \sin(\omega t + \theta_2) \dots \dots \dots (2)$$

حيث x_1, x_2 تمثلان الازاحتين الآتيتين للجسيم نتيجة تأثير الحركتين التوافقيتين

a_1, a_2 تمثلان سعتي الحركتين

θ_1, θ_2 تمثلان زاويتي الطور الابتدائيتين , ω : التردد الزاوي نفسه للحركتين

إذن محصلة الإزاحة x الناتجة من تركيب الازاحتين هي $x = x_1 + x_2$

$$x_1 = a_1 \sin(\omega t + \theta_1) + a_2 \sin(\omega t + \theta_2)$$

$$x = a_1 (\sin \omega t \cos \theta_1 + \cos \omega t \sin \theta_1) + a_2 (\sin \omega t \cos \theta_2 + \cos \omega t \sin \theta_2) \dots (3)$$

نرتب المعادلة فتصبح :

$$x = (a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos \theta_2) \sin \omega t + (a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin \theta_2) \cos \omega t \dots (4)$$

ولما كانت الكميات $a_1, a_2, \theta_1, \theta_2$ ثابتة لذلك يمكن إن نفرض إن :

$$a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos \theta_2 = A \cos \theta \dots (5)$$

$$a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin \theta_2 = A \sin \theta \dots (6)$$

بتربيع وجمع المعادلتين 5,6 نحصل على :

$$A^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = a_1^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + a_2^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) + 2a_1 a_2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2)$$

ومن هذه المعادلة ينتج ان :

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \dots \dots (7)$$

من قسمة معادلة 5 على 6 نحصل على :

$$\tan \theta = \frac{a_1 \sin \theta_1 + a_2 \sin \theta_2}{a_1 \cos \theta_1 + a_2 \cos \theta_2} \dots \dots (8)$$

وبتعويض معادلتين 5,6 في معادلة 4 نحصل على :

$$x = A \cos \theta \sin \omega t + A \sin \theta \cos \omega t$$

ومنهُ _____:

$$x = A \sin(\omega t + \theta) \dots\dots(9)$$

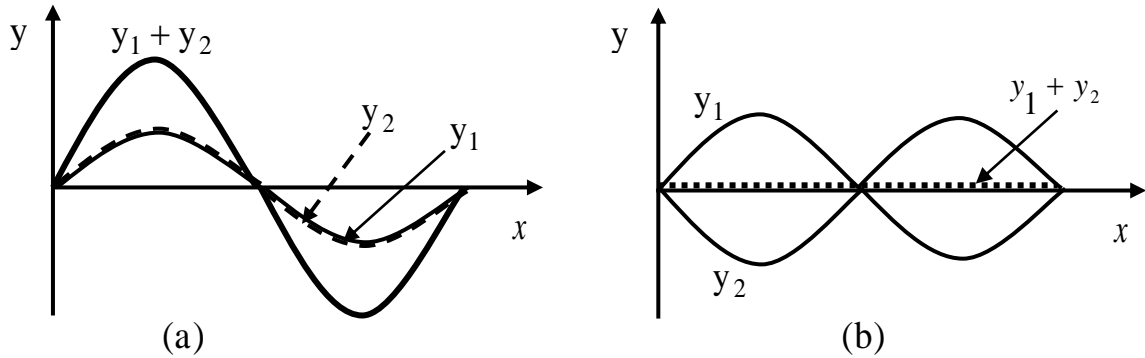
هذه المعادلة تمثل محصلة الإزاحة الآنية x للحركتين التوافقيتين البسيطتين ونلاحظ إنها تشابه المعادلتين الأصليتين 1,2 مما يشير إلى أنها تمثل حركة توافقية بسيطة أيضا لها نفس التردد الزاوي المشترك لحركتي الحركة . وفي هذه المعادلة A تمثل سعة الحركة التوافقية الناتجة ويمكن إيجادها من المعادلة 7 .

θ : تمثل زاوية الطور الابتدائي لمحصلة الحركة ويمكن إيجادها من معادلة 8 .

فيما يتعلق بالتداخل بين أي حركتين توافقيتين بسيطتين إذا كان لهما نفس التردد والطور ويختلفان بالسعة $\theta = \theta_1 = \theta_2$ فإن معادلة 9 تصبح

$$x = (a_1 + a_2) \sin(\omega t + \theta) \dots\dots(10)$$

حيث تمثل هذه المعادلة الجمع الجبري البسيط للمعادلتين 1,2 ويمكن تمثيل مركبتي الحركة المتمثلتين بالمعادلتين 1,2 ومحصلتها المتمثلة بالمعادلة 10 كما في الشكل a.



ونلاحظ إن سعة الموجة الناتجة تساوي مجموع سعتي الحركتين التوافقيتين المتداخلتين لهما نفس التردد والطور أي أن الحركتين تقوي أحدهما الأخرى ويسمى بالتداخل البناء . وبالجدير بالملاحظة انه عندما تتساوى السعتين ($a_1 = a_2$) فإن الحركتين التوافقيتين تنطبق كل منهما على الأخرى تماما وتكون محصلة سعتهما مساوية لضعف السعة الأصلية لأى منهما .

أما إذا كان عندنا تداخل حركتين توافقيتين لهما نفس التردد ولكن تختلفان بالسعة والطور .يصبح لدينا

تداخل هدام والسعة الكلية تمثل المجموع الجبري البسيط للسعتين كما في الشكل b .

نفرض مثلاً إن الحركة التوافقية الأولى بدأت عند $\theta = 0$

$$x_1 = a_1 \sin \omega t$$

والحركة التوافقية الثانية بدأت عند $\theta = \pi$

$$x_2 = a_2 \sin (\omega t + \pi)$$

$$\therefore x = x_1 + x_2$$

$$x = (a_1 - a_2) \sin \omega t$$

نلاحظ إن محصلة السعة تساوي الفرق بين سعتي الحركتين وتكون قمة احدهما فوق قعر الأخرى ، أي أن الحركتين تعاكس احدهما أخرى وفي هذه الحالة تلغي أو تهدم الحركتين بعضهما البعض ويسمى بالتداخل الهدام .

تركيب حركتين توافقيتين بسيطتين في اتجاهين متعامدين

نفرض أن لدينا جسم يتأثر آنياً بحركتين توافقيتين بسيطتين احدهما تؤثر باتجاه المحور السيني والأخرى تؤثر باتجاه المحور الصادي ويكون لهما نفس التردد ، فلو فرضنا أن الإزاحة الآتية للجسم على امتداد المحور السيني هي :

$$x = a \sin(\omega t + \theta) \quad (1) \dots\dots$$

والإزاحة الآتية لنفس الجسم على امتداد المحور الصادي هي :

$$y = b \sin \omega t \dots\dots(2)$$

هذه المعادلتين مختلفتين بالسعة والطور الابتدائي للحركة . من المعادلة (1) نحصل

$$\frac{x}{a} = \sin(\omega t + \theta)$$

$$\frac{x}{a} = \sin \omega t \cos \theta + \cos \omega t \sin \theta \dots\dots (3)$$

$$\frac{y}{b} = \sin \omega t \quad \text{من معادلة (2)}$$

$$\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$$

$$\cos \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}}$$

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} \cos \theta + \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \sin \theta$$

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \cos \theta = \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2}} \sin \theta$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \cos^2 \theta - \frac{2xy}{ab} \cos \theta = (1 - \frac{y^2}{b^2}) \sin^2 \theta$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} (1 - \sin \theta) - \frac{2xy}{ab} \cos \theta = \sin^2 \theta - \frac{y^2}{b^2} \sin^2 \theta$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \theta = \sin^2 \theta$$

هذه المعادلة تمثل معادلة قطع ناقص ellipse وتمثل شكل المسار الذي يسلكه الجسم مسار قطع ناقص عندما يخضع تحت تأثير حركتين توافقيتين لهما نفس التردد وسعتين مختلفتين وبفارق طور قيمته θ ويمكن أن نجد من هذا أشكال ليساجو وسوف نعطي قيم θ لكي نحدد تلك الأشكال.