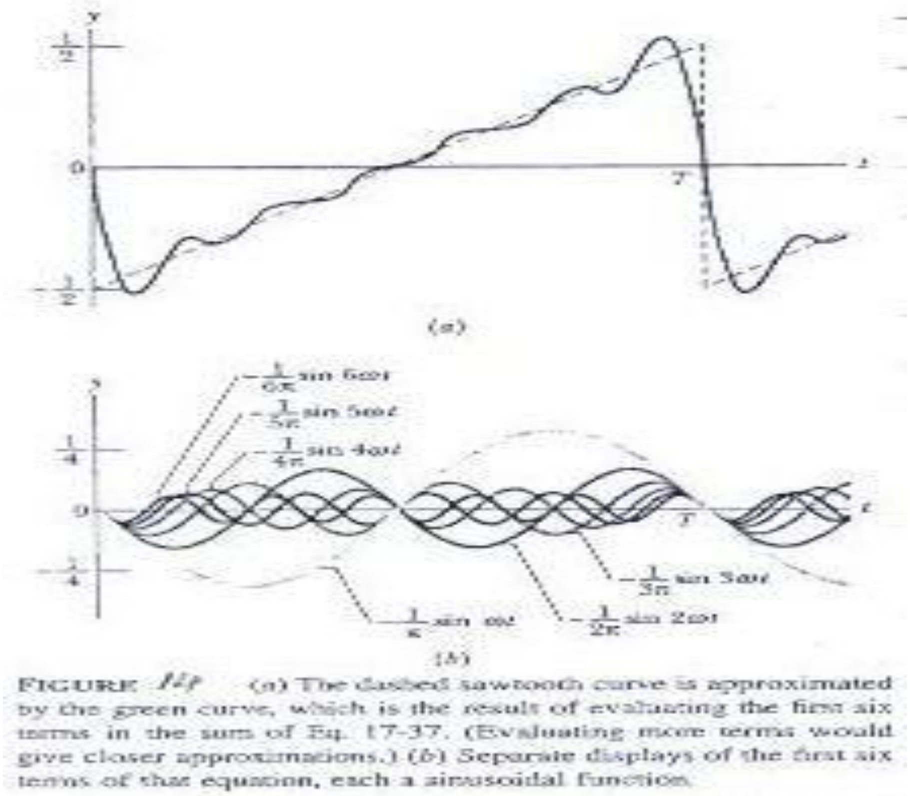
تحليل فورير

فورير هو عالم فرنســـي شرح كيف يمكننا استخدام مبدأ التراكب لتحليل الموجات الغير حبيبية ولقد وضـــح أنه بإمكاننا أن نمثل أي موجة مكان بمجموع عدد كبير من الموجات ذات ترددات وذات سعات معينة. إن نظرية فورير تخبرنا بأن أي منحنى أيا كان شكله أو بأي طريقة تتم الحصول عليه أصـــلاً يمكننا أن ننتجه أو نمثله بتداخل عدد كافي من الموجات التوافقية الحبيبية هذا ما يوضـــحه الشـــكل(7-3) يبين مثال لمتسلسلات فورير هذا هو اسم هذا الجمع إن المنحنى الذي على شكل أسنان منشار يوضح التغير في الزمن عندما (x=0) للموجة التي نريد تمثيلها .



شكل (7-3) تحليل فورير

يمكن كتابة صيغة متسلسلة فورير بالشكل الآتي :

$$y(t) = -\frac{1}{\lambda}\, sinwt - \frac{1}{2\lambda}\, sin2wt - \frac{1}{3\lambda}\, sin3wt - \cdots \ldots.$$

والتي فيها $w = \frac{2\lambda}{T}$ حيث T هو الزمن الدوري للمنحني الذي على شكل أسنان منشار ناتج من جمع الست حدود في المعادلة ، وينطبق هذا المنحني على المنحني المنقط وبإضافة حدود أخرى يمكننا أن نقترب أكثر من الشكل المنقط .

الحركة الموجية في بعدين

الموجات في بعدين هي التي تتقدم على امتداد سطح مستو يتعين بمحورين فقط .وخير مثال على هذا النوع من الحركة الموجية هو الموجات المستعرضة المنتقلة في الاغشية الرقيقة المتوترة مثل غشاء الصابون او غشاء الطبل او مكبرة الصوت .اي ان الغشاء في هذه الحالة يمكن تصوره عبارة عن وتر مرن ذي بعدين .وعلى هذا الاساس يمكن الحصول على معادلة الحركة الموجية في بعدين بطريقة مماثلة تماما لتلك المستخدمة للحصول على معادلة الحركة الموجية في بعد واحد في الحبل المتوتر.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\sigma}{S}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

هذه تمثل معادلة الحركة الموجية في بعدين . ويلاحظ أن النسبة $\frac{S}{\sigma}$ تمثل مربع سرعة الموجة المستعرضة المتحركة على غشاء قوة الشد السطحي فيه S وكثافته السطحية σ . فإذا رمزنا لسرعة الموجة بالرمز c فان $c^2=\frac{S}{\sigma}$

وبذلك تصبح معادلة الحركة للموجة المستعرضة في الغشاء المتوتر كالآتي :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

الحركة الموجية في ثلاثة أبعاد (موجات الصوت في الهواء)

سبق وان درسنا الحركة الموجية في بعد واحد وفي بعدين وهذه في الواقع لا تمثل حالات عامة إذ إن معظم المسائل الصوتية في ثلاثة أبعاد حيث إن أي مصدر صوتي يبث موجاته في ثلاثة اتجاهات .والمعادلة العامة التي تصف انتشار الموجة الصوتية في أي وسط مادي ذي ثلاثة أبعاد يمكن اشتقاقها بإتباع نفس الخطوط العامة التي سبق إن اتبعناها في حالة التعامل مع الموجة الصوتية في بعد واحد . إن الشكل النهائي لمعادلة الحركة الموجية في ثلاثة أبعاد يمكن اشتقاقه باستخدام أي نظام للإحداثيات سواء كان متعامد (كارتيزيا) أو كرويا أو اسطوانيا .الصيغة العامة لمعادلة الحركة الموجية في ثلاثة أبعاد تأخذ الشكل الآتي :

$$\nabla^2\psi=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$$

حيث إن ψ هي دالة الموجة وتمثل الخاصية أو المتغير الذي يصف الموجة مثل إزاحة الجسم أو

ســـرعته أو تعجيله .وان ∇^2 يمثل المؤثر التفاضلي ويدعى مؤثر لابلاس ، وهذا المؤثر ياخذ الصيغة التي يحددها نظام الاحداثيات المستخدم في المعادلة .

فمثلا في الإحداثيات الكارتيزية (x, y, z) يكون :

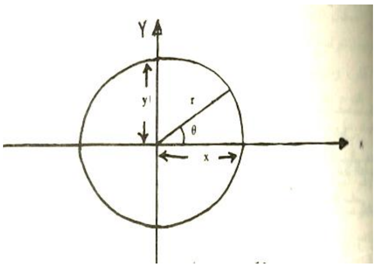
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}$$

وفي الإحداثيات الكروية (r,θ,ϕ) يكون:

$$\Delta^2 = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2 sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

وفي الإحداثيات الاسطوانية (r,ϕ,z) يكون:

$$\Delta^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

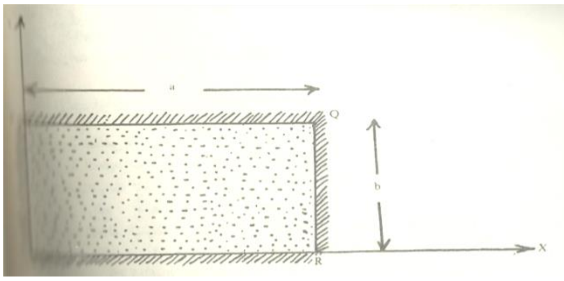


الاهتزازات الطبيعية للأغشية المحدودة

إن الاهتزاز الطبيعي لأي غشاء محدود يعتمد على طبيعته وشكله وشروطه الحدودية . وتختلف درجة التعقيد الرياضية اللازمة للتحليل باختلاف الأشكال والشروط فمثلا تكون الرياضيات المستخدمة لتحليل غشـــاء مربع أو مســـتطيل الشكل ابسط من حالة الأغشية الدائرية الشكل ،ولهذا السبب سنبدأ بدراسة الحالة البســـيطة وهي تحليل الاهتزازات في غشاء مستطيل الشكل والذي سيمكننا من إيجاد الترددات الطبيعية المسموحة للغشاء التي يهتز بها وأنماط الحركة المرافقة لتلك الاهتزازات.

١- الاهتزازات الطبيعية للأغشية المستطيلة الشكل

نفرض إن لدينا غشاء منتظم مستطيل الشكل أبعاده a ,b ومثبت من جميع حافاته بإحكام كما مبين في الشكل (3-8)



الشكل (8-3) يبين غشاء مستطيل أبعاده (a ,b) ومثبت من حافاته بإحكام

إن معادلة الحركة الموجية التي تصف الاهتزاز المستعرض في غشاء منتظم هي

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$$

حيث x ,y تقاس في مستوى الغشاء و z تمثل الإزاحة العمودية على مستوي الغشاء وc هي سرعة تقدم الموجة وتساوي $\sqrt{\frac{S}{\sigma}}$ وهذه المعادلة مناسبة تماما لايجاد نمط الاهتزاز الطبيعي في الأغشية المستطيلة والمربعة والمثلثة الشكل .

حل هذه المعادلة العام هو :

$$z(x,y,t)=(A\sin ckt+B\cos ckt)(C\sin k_1 x+D\sin k_1 x)(E\sin k_2 y+F\cos k_2 y)$$

إن أي جزء من الغشاء المستخدم يمكن أن يهتز ما عدا النقاط الواقعة على حدوده المقيدة بإحكام لذلك تكون الإزاحة المستعرضة z(x,y,t) في أي نقطة حدودية تساوي صفر دائما وعلى تكون الشروط الحدودية لهذا الغشاء هي :

١- عند الحد OP ‏z(0,y,t) ، ٢- عند الحد RQ ‏z(a,y,t)

٣-عند الحد OR ‏z(x,0,t) ، ٤- عند الحد PQ ‏z(x,b,t)

نطبق الشرط الحدودي الأول على الحل العام فنحصل على :

$$z(o,y,t)=(A\sin ckt+B\cos ckt)D.(E\sin k_2 y+F\cos k_2 y)=0$$

ومنها نجد إن D=0

نطبق الشرط الحدودي الثاني على الحل العام فنحصل على :

$$z(a,y,t)=(A\sin ckt+B\cos ckt)C\sin k_1 a.(E\sin k_2 y+F\cos k_2 y)=0$$

ومنها نجد إن C=0 وهذا لا يمكن لان الحل العام يختفي ويصبح مساويا للصفر أو

$$\sin k_1 a=0$$

أي إن $k_1 a = m\pi$

حيث $m=1,2,3,\dots$

نطبق الشرط الحدودي الثالث على الحل العام فنحصل على :

$$z(x,o,t)=C\sin\frac{m\pi}{a}x(A\sin ckt+B\cos ckt).F=0$$

ومنها نجد إن F=0

نطبق الشرط الحدودي الرابع على الحل العام فنحصل على :

$$z(x,b,t) = C\sin\frac{m\pi}{a}x(A\sin ckt + B\cos ckt).E\sin bk_2 = 0$$

وهذا يعني أما E= 0 وهذا لا يمكن لان الحل العام يصبح مساويا للصفر او

$$\sin bk_2 = 0$$

أي إن bk=

nπ
n=1,2,3 ,….

$$\because (A\sin ckt + B\cos ckt) = G\sin(ckt+\theta)$$

$$G = \sqrt{A^2+B^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{B}{A}$$

لذلك نحصل على الحل الخاص الذي يصف نمط الاهتزاز الطبيعي لهذا الغشاء

$$z(x,y,t) = H\sin\frac{m\pi}{a}x\,\sin\frac{n\pi}{b}y\,\sin(ckt+\theta)$$

حيث H يمثل سعة الاهتزاز ويساوي حاصل ضرب الكميات (C,E,G)

وان ck يمثل التردد الزاوي للاهتزاز الطبيعي للغشـــــاء ويرمز له w وان (m,n) تمثل نمط الاهتزاز الطبيعي في الغشاء.

إن مرتبـــة نمط الـــاهتزاز (m,n) ترتبط مع التردد الزاوي الطبيعي من خلال العلاقة w =ck

$$w^2 = \frac{S}{\sigma}\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]$$
$$\because w = 2\pi f$$
$$\therefore f^2 = \frac{S}{4\pi^2\sigma}\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]$$

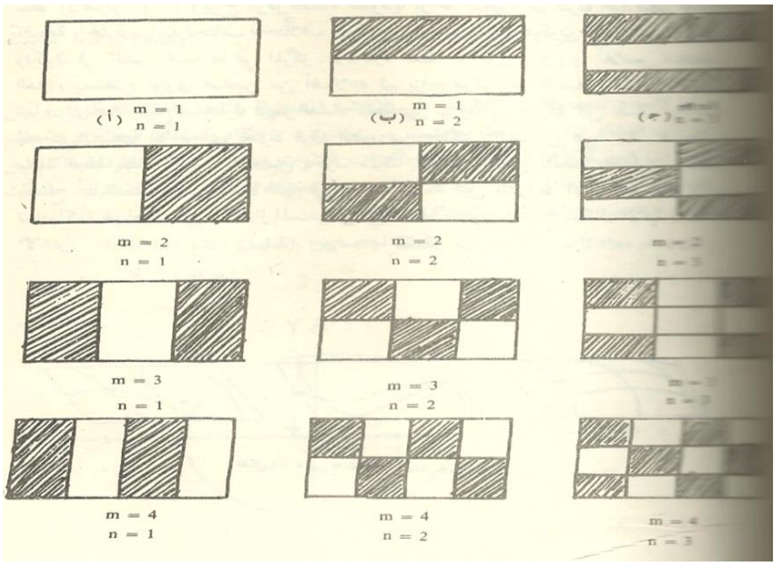
$$\therefore f_{m,n} = \sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\frac{S}{4\sigma}}$$

فمثلا إن التردد الأساسي الطبيعي الذي يقابل مرتبة نمط الاهتزاز (1,1) هو

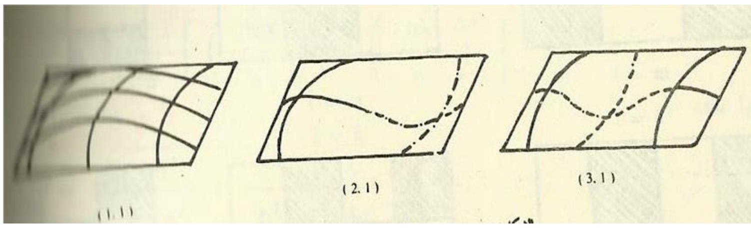
$$f_{1,1} = \sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2\frac{S}{4\sigma}}$$

إن عدد أنماط الاهتزاز للغشـــاء كثير جدا وفي الحقيقة أن يبلغ نظريا مالانهاية والشـــكل (3-9) يبين انمـــاط الـــاهتزاز المختلفـــة من (1,1) إلى (4,3) وان أي نمط من هذه الأنماط قد يحدث منفردا أو

مشتركا مع أنماط أخرى .



الشكل(3-9) يبين أنماط الاهتزاز لغشاء مستطيل مثبت من جميع حافاته بإحكام



الشكل(3-10) يبين أنماط الاهتزاز (1,1)،(2,1)،(3,1)