الفصل الخامس

تشتت (تبدد) الموجات

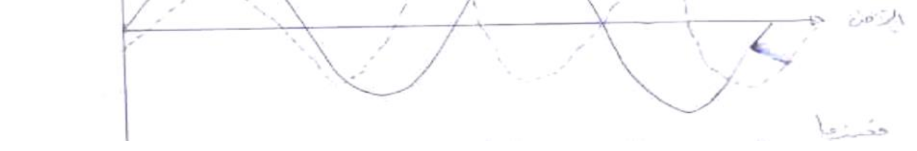
يمكن وصف ظاهرة التشتت بأنها التغير في سرعة تقدم الموجة الجيبية في الوسط المادي مع الطول الموجي أو التردد. وعموما فان أي إشارة أو اضطراب يتألف من خليط من الترددات المختلفة .وفي الواقع فان معظم الأصوات التي نتعامل معها هي أصوات معقدة تتركب من مزيج من الترددات ونادرا ما نتعامل مع صوت أحادي التردد .وهذه الظاهرة لها أهمية في النظرية العامة للحركة الموجية .

إذا ما تحركت مجموعة من الموجات ذات الأطوال الموجية المختلفة في وسط مادي مشتت فان كل موجة تتحرك بسرعة تختلف عن سرع الموجات الأخرى وبذلك فان هذه الظاهرة تعني انه بعد ما كانت جميع الموجات في نفس الموقع في لحظة ما فإنها تصبح منفصلة عن بعضها في موقع آخر في لحظة أخرى نتيجة اختلاف سرعها .وخير مثال على هذه الظاهرة هو تحلل الضوء الأبيض إلى مركباته بواسطة الموشور ، وذلك بسبب تباين سرع المركبات (أي الموجات المختلفة التي يتألف منها الضوء الأبيض) خلال مرورها بمادة الموشور، ونتيجة ذلك تتكسر هذه المركبات بزوايا مختلفة .ومثال آخر هو تحلل الصوت المركب من عدة ترددات إلى مركباته عند مروره خلال ثاني اوكسيد الكاربون. ويقال للوسط المادي الذي تعتمد فيه سرعة انتقال الموجة على الطول الموجي (أو التردد) بأنه وسط مشتت مثل أي وسط شفاف كالزجاج أو الماء أو الهواء بالنسبة للموجات الضوئية .وفي مثل هذه الأوساط تكوم العلاقة بين سرعة الضوء c والطول الموجي λ هي .

$$\frac{1}{c} = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

تراكب الموجات في الأوساط غير المشتتة (الضربات ، تضمين السعة)

الضـــربات: هو نمط خاص من الحركة الدورية وتحدث عندما يتأثر جســـيم آنيا بحركتين توافقيتين بســـيطتين الفرق بين ترددیهما قليل فان ســـعة الحركة الاهتزازية الناتجة للجسيم تتناوب بين نهايتين عظمى وصـــغرى مع مرور الزمن.،وتعرف الضربات أيضا بأنها(التناوب في جهارة الصوت نتيجة تداخل الموجات الصوتية وتعتبر طريقة بسيطة لتنغيم الآلات الموسيقية .



فعندما تحدث الحركتان التوافقيتان على امتداد محور معين نتيجة الاختلاف الضئيل بين ترددیهما يحدث تغير تدريجي في فرق الطور بين الحركتين مع مرور الزمن ، ففي النقطة A تكون الحركتين بنفس الطور وبنفس الاتجاه وتكون سعة الإزاحة في ذروتها وبنفس الاتجاه وهذا يمثل **التداخل البناء** ومحصلة الإزاحة لهذا النوع من التداخل هو المجموع الجبري للازاحتين، وبمرور الزمن فان الحركتين تخرجان عن الطور ويزداد فرق الطور بينهما حيث يصبح(١٨٠) كما في النقطة B وتكون الازاحتان متعاكستان وتلغي احدهما الأخرى وسعة الحركة الاهتزازية تكون في أدنى قيمة لها وهذا يمثل **التداخل الاتلافي أو الهدام** ومحصلة الإزاحة تكون مساوية للفرق بين الازاحتين ، وهكذا تتكرر العملية وتتناوب محصلة الإزاحة بين أقصى قيمة وأدنى قيمة لها مع مرور الزمن وبتردد ثابت يدعى **بتردد الضربات** ويساوي (الفرق بين ترددي الحركتين التوافقيتين). والشرط الأساسي لحدوث ظاهرة الضربات هو أن يكون الفرق بين الترددين قليل .

نفرض لدينا جسيم في وسط يتذبذب تحت تأثير حركتين توافقيتين بسيطتين مختلفتين قليلا في التردد.
الإزاحة الآنية للجسيم في الزمن t بسبب تأثير الحركة التوافقية الأولى التي سعتها A_1 وترددها f_1 هي x_1.

$$X_1=A_1\sin w_1t =A_1\sin 2\pi f_1 t$$

الإزاحة الآنية لنفس الجسم في نفس اللحظة الزمنية t نتيجة تأثير الحركة التوافقية الثانية التي سعتها A_2 وترددها f_2 هي x_2

$$X_2=A_2\sin w_2t =A_2\sin 2\pi f_2 t$$

محصلة الإزاحة x في الزمن t تنتج من تركيب الحركتين

$$X= x_1+x_2$$

$$= A_1\sin w_1t + A_2\sin w_2t$$

يمكن تحليل الضربات إذا افترضنا بان السعات متساوية

$$A=A_1+A_2$$

$$X = A \sin w_1t+A \sin w_2t$$

$$x = 2A\, cos\left(\frac{w_2-w_1}{2}\right) t\; sin\left(\frac{w_2-w_1}{2}\right) t$$

شرط ظاهرة الضربات الفرق بين w_2,w_1 يكون قليلا (اقل من 10Hz) ويتوقف على الفاصل الزمني بين أي ترددين أو ضربتين وعلى الأذن البشرية.

$f_2 - f_1 = \Delta f \leq 10Hz$

- **ظاهرة تضمين السعة**

هي ظاهرة ذات أهمية علمية في عملية الاتصالات الكهرومغناطيسية والالكترونية فضلا عن الصوتيات وتكون السعة متغيرة جيبيا ويتذبذب فيها التردد بين التردد العالي والتردد المنخفض ويمكن تمثيل المعادلة الأخيرة بشكل آخر

$$\therefore x = B \sin\left(\frac{w_2 - w_1}{2}\right) t$$

$$B = 2A \cos\left(\frac{w_2 - w_1}{2}\right) t$$

وهذه المعادلة تمثل معادلة حركة دورية سعتها B تتذبذب بتردد عالي قيمته تساوي المتوسط الحسابي للترددين ويمثـــل التردد الفعلي للحركة ، أما $\sin\left(\frac{w_2 + w_1}{2}\right)$ يعتبر عامل متذبذب تقع قيمته دائما بين الحدين (±1) . $0 \leq B \leq 2A$

اكبر قيمة للسعة (2A) $\cos\left(\frac{w_2 - w_1}{2}\right) t = \pm 1$

N أعداد صحيحة (...,0,1,2)

الفترة الزمنية T بين اكبر سعتين متتاليتين هي : $\tau = \frac{1}{f_2 - f_1} = \frac{1}{\Delta f}$

وهذا يعني أن عدد السعات الكبرى في الثانية الواحدة هو Δf

اصغر قيمة B عندما تكون السعة = صفر أي $\cos\left(\frac{w_2 - w_1}{2}\right) t = 0$

نســـتنتج من هذا إن محصـــلة تركيب حركتين توافقيتين بســـيطتين يكون حركة توافقية بسيطة أيضا ترددها يساوي متوسط تردد الحركتين الأصليتين وسعتها تتغير دوريا مع الزمن بين مجموع السعتين والفرق بينهما وبتردد مقداره الفرق بين الترددين الأصليين.

مثال// احســـب ســـرعة الصـــوت في غاز تولد فيه موجتان أطوالها (100cm) و(101cm) ١٨، ضربة في ٦ ثواني ؟

$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{100}$ تردد الموجة الاولى

$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{v}{101}$ تردد الموجة الثانية

عدد الضربات في الثانية الواحدة : $\frac{18}{6}$ $= 3$

$$f_2 - f_1 = \frac{v}{100} - \frac{v}{101} = 3$$
V=303m/sec

تشتت الموجات (سرعة المجموعة والطور)

السرع في الحركة الموجية

مصادر الصوت تكون عادة كبيرة جدا بالمقارنة مع الأبعاد الفاصلة بين الجزيئات تحت الشروط الجوية الاعتيادية وان هذه الجزيئات المنفردة التي يتألف منها الوسط لا تنتقل مع الموجة بل تهتز موضعيا حول نقاط توازنها وعلى هذا الأساس يمكن اعتبار الجزيئات عبارة عن مهتزات تهتز بحركات توافقية بسيطة اهتزازا طوليا حول موضع توزانها. وطبيعي إن جميع هذه المهتزات لا تهتز بنفس الطور بل بأطوار مختلفة تتغير دوريا .واختلاف طور حركة هذه المهتزات هو الذي نلاحظه كموجات . وهناك ثلاث سرع في الحركة الموجية وترتبط مع بعضها بعلاقات رياضية ، وهي :

١- سرعة الجسيم

وهي السرعة التوافقية البسيطة للجسيم حول موضع توازنه وهي مقدار متغير ، فهي تكون في غايتها العظمى في لحظة مرور الجسيم في موضع توازنه وتكون صفرا عندما يكون في أقصى إزاحة عن موضع التوازن .

$$\zeta = a\sin(wt - kx) \quad , \quad w = kC \quad , \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$
$$\zeta = asin\frac{2\pi}{\lambda}(ct - x)$$

C هي سرعة الموجة

$$u = \frac{d\zeta}{dt} = \frac{2\pi ac}{\lambda}\, cos\frac{2\pi}{\lambda}\,(ct - x)$$

هذه المعادلة توضح العلاقة بين سرعة الجسيم المهتز u وسرعة الموجة c .

أي إن ســرعة الجســيم u هي السرعة التي يزودها المصدر الصوتي المهتز لجسيمات الوسط وتتوقف على ســعة الاهتزاز واتجاهه وتختفي متى ما توقف السطح المهتز عن الاهتزاز وهذه السرعة تختلف عن السرع الجزيئية العشوائية المرتبطة بالحركة المستمرة لجسيمات الوسط .

٢- سرعة الطور

هي سرعة تقدم طور معين للموجة المفردة وهي مقدار ثابت في الوسط الواحد وتساوي حاصل ضرب التردد في الطول الموجي . $V_{ph} = \frac{w}{k} = \lambda f$

وهذا المقدار الثابت يسمى سرعة الموجة ويعتمد على الثوابت الفيزياوية للوسط . وهي نفسها سرعة تقدم الطاقة التي تحملها الموجة. يمكن كتابة دالة من أي شكل من موجة منتقلة في اتجاه x بتعويض x-ut بدلا عن x ، فلو كان $f(x) = x^2$ فان : $f(x-ut) = (x-ut)^2$

وبما إن الموجة المنتقلة في اتجاه x بزمن t تكون دالة ل x,t .

لو تتبعنا حركة نقطة p في جزء معين من الموجة (شكل ٤) بافتراض إن شكل الموجة لا يتغير فان هذا يعني إن الاحداثي السيني للنقطة p يجب أن يتغير مع الزمن .أي أن حركة أي طور للموجة يجب أن يكون له :

x-ut=constant

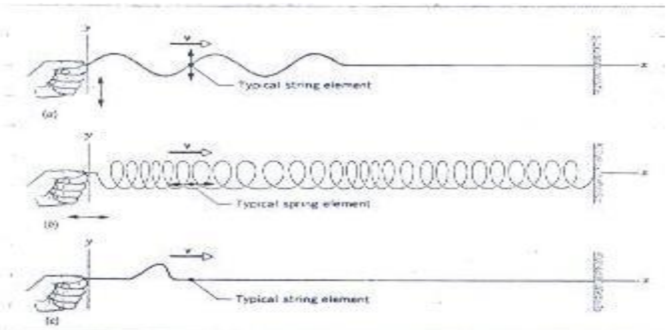


Figure 1 (a) Sending a transverse wave along a string. Each element of the string vibrates at right angles to the direction of propagation of the wave. (b) Sending a longitudinal wave along a spring. Each element of the spring vibrates parallel to the direction of propagation of the wave. (c) Sending a single transverse pulse along a string.

وللتحقق من المعادلة الأخيرة تصف حركة الطور الموجي بالتفاضل بالنسبة للزمن

$$\frac{dx}{dt} - u = 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = u$$

السرعة $\frac{dx}{dt}$ تصف حركة الطور لموجة وسميت بسرعة الطور phase velocity

٣- سرعة المجموعة

في حالة التعامل مع عدد أو مجموعة من الموجات ذات الأطوال الموجية المختلفة في وسط مشتت فانه ينبغي التعامل مع السلوك الجماعي لجميع الموجات في آن واحد وعدم التعامل مع كل موجة على انفراد خاصة إذا كانت المجموعة تتحرك في وسط مفرق ويعبر عنها ب

$V_g = \partial w/\partial k$

نلاحظ ســـرعة المجموعة هي تفاضـــل التردد الزاوي بالنسبة للعدد الموجي وهي بالطبع تختلف عن سرعة الطور .

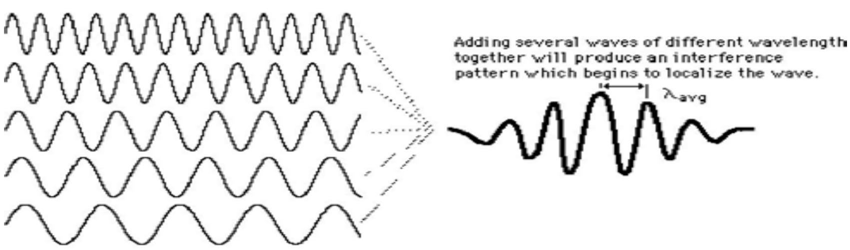
$$V_{\mathrm{p}} = \frac{\mathrm{w}}{\mathrm{k}} \Rightarrow \mathrm{w} = v_p k$$

$$\mathrm{dw} = v_p . dk + k . dv_p$$

$$v_g = \frac{dw}{dk} = \frac{v_p . dk + k . dv_p}{dk} = v_p + k \, \frac{dv_p}{dk}$$

هذه المعادلة تتحقق شرط أن لا تكون سرعة الطور اكبر من سرعة المجموعة وبالتالي ليست اكبر من سرعة الضوء .

حزمة الموجة



تكون الرزمة من تداخل مجموعة من الموجات البســـيطة بأطوال موجة مختلفة او هو تصور أن تصاحب كل جسيم حزمة موجية تصف حركته كما في الشكل . وقد أدت ظاهرة ازدواجية موجة-جسيم إلى ذلك التصور في الفيزيـــاء. ويمكن للحزمة الموجية أن تتكون من عدة موجات جيبية لها أطوار مختلفة يمكنها التداخل إما تداخلا بناء أو تداخلا هدام . وقد تتعرض الحزمة الموجية أثناء تقدمها للتشـــتت على جســـيم أو لا تتشتت . وتصـــف ميكانيكا الكم الحزمة الموجية وصفا خاصا: فهي تؤخذ كموجة احتمالية تعطي "احتمال" وجود جسيم أو عدة جسيمات في نقطة معينة و بكمية حركة معينة. وهي تماثل في ذلك الدالة الموجية.

سنعتبر حزمة موجية مكونة من موجة واحدة ، تمثل إحدى حلول المعادلة الموجية:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$$

حيث c سرعة الموجة.

ولذلك نبدأ باعتبار حالة موجة لها تردد واحد وبالتالي طول موجة واحد ، وتلك هي أبسط حالة لحل المعادلة الموجية أعلاه .ويمكن تمثيل موجة ذات تردد ثابت تنتشر في اتجاه x بالمعادلة:

$$\psi_{\mathrm{einzeln}}(x,t) = c_s \cdot e^{i(\omega t - kx)}$$

ω التردد ووحدته sec^{-1}

k العدد الموجي ووحدته cm^{-1}

$(e^{i(\omega t-kx)})$ دالة موجية تعتمد على الزمن t والمكان x في صيغة عدد مركب،

c_s طول الموجة ومن الوجهة الفيزيائية فإنه يكفي اعتبار الجزء الحقيقي فقط:

$$Re\left(\psi_{\mathrm{einzeln}}(x,t)\right)=c_s\cdot\cos(\omega t-kx)$$

ويمكن تطابق عدة موجات لها ترددات مختلفة ، ويمثل مجموعها أيضا حلا للمعادلة الموجية:

$$\psi(x,t)=\sum_j c_j\cdot e^{i(\omega_j t-k_j x)}.$$

كما يمكن حل المعادلة الموجية عن طريق إجراء التكامل بدلا من عملية الجمع . بذلك يتحدد الطول c الذي يعتمد على العدد الموجي k