

مثال// إذا كانت قوة الاحتكاك التي تقاوم حركة جسم مهتز معلق بنابض هي $10v$ نيوتن .

١- برهن إن حركة الجسم حركة توافقية مضمحلة

2- احسب السعة

٣- إذا كانت قوة اللزوجة (الاحتكاك) للوسط الذي يهتز به الجسم هي $40x$ فما هي طبيعة الحركة الناتجة إذا ما أزيح جسم عن موضع توازنه ومن ثم ترك علما إن كتلة الجسم $24g$ وثابت القوة $40N/m$ وإن الجسم بدا حركته من السكون عند $20cm$.

$$F_k = -40x, \quad F_R = -10v$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -10v - 40x$$

$$24 \frac{d^2x}{dt^2} + 10 \frac{dx}{dt} + 40x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{10}{24} \frac{dx}{dt} + \frac{40}{24}x = 0$$

بالمقارنة مع المعادلة التفاضلية المضمحلة

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2r \frac{dx}{dt} + w_0^2 x = 0$$

$$2r = \frac{10}{24} \rightarrow 2r = 0.4 \quad \therefore r = 0.2$$

$$w_0^2 = \frac{40}{24} \rightarrow w_0^2 = 1.2 \text{ rad/sec}$$

$$w_0 > r$$

$$x = Ae^{-rt} \sin(wt + \varphi)$$

$$w = \sqrt{w_0^2 - r^2} = \sqrt{(1.2)^2 - (0.2)^2} = 1.1 \text{ rad/sec}$$

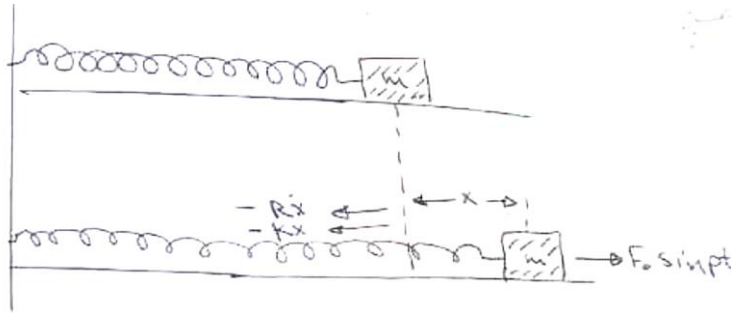
الاهتزاز القسري

عندما يزاح المهتز عن موضع توازنه ويترك حرا فإنه سوف يهتز بتردد يعتمد على ثوابت المرونة والقصور الذاتي وان ما يساعد على استمرار الاهتزاز هو الطاقة المخزونة في المهتز في بداية الحركة الاهتزازية ولكن بسبب المقاومة الاحتكاكية التي تكون موجودة مهما كانت صغيرة فإن سعة الاهتزاز سوف تتضاءل بالتدريج مع الزمن حتى يتوقف المهتز عن الاهتزاز . ولكي نحافظ على استمرار الاهتزاز يجب أن يزود المهتز بالطاقة باستمرار للتغلب على تأثير المقاومة الاحتكاكية وإذا كانت الوسيلة لتزويد المهتز بالطاقة على شكل قوة خارجية دورية فعندئذ يقال بان المهتز في حالة "اهتزاز

قسري" أو إجباري ، ومن أبسط أمثلة هذا النوع من الاهتزاز الأرجوحة ، اهتزاز الجسر تحت ضربات أقدام طابور عسكري عند العبور اهتزاز الآلات الموسيقية بأنواعها ، اهتزاز هيكل المحرك نتيجة الضربات الدورية للمكابس داخل اسطوانات الاحتراق.

الاهتزاز القسري: هو التذبذب الناتج من تسليط قوة خارجية على جسم موضوع تحت تأثير قوة مرنة وهذا الجسم يهتز بتردده الطبيعي الذي يكون معتمدا على تردد القوة الدورية المرنة. ومثال ذلك وضع شوكة رنانة على صندوق خشبي فالصندوق يهتز والهواء بداخله أيضا يهتز.

معادلة الحركة للمهتز المضمحل تحت تأثير قوة خارجية (معادلة الاهتزاز القسري)



من الأمثلة الشائعة للحركة القسرية هو المتذبذب المخمد الذي يؤثر عليه قوة خارجية تتغير دوريا مع الزمن على النحو $F(t) = F_0 \sin pt$ حيث p هو التردد الزاوي للقوة الخارجية و F_0 ثابت. وبصورة عامة فان p للقوة الخارجية مستق تماما عن التردد الطبيعي w_0 أو التردد الزاوي المضمحل w وان w_0 للمتذبذب يبقى ثابتا من خلال قيمة m, k . أي إن الجسم المهتز يخضع لثلاث قوى هي قوة الاستعادة $(-kx)$ وقوة الاحتكاك $(-Rv)$ والقوة الخارجية الدورية $(F_0 \sin pt)$ وبتطبيق قانون نيوتن الثاني على هذه الحالة نحصل على :

$$\sum F = ma = F_0 \sin pt - kx - R \frac{dx}{dt} \dots \dots (1)$$

$$\left[m \frac{d^2x}{dt^2} = F_0 \sin pt - kx - R \frac{dx}{dt} \right] \div m$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{R}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = \frac{F_0}{m} \sin pt \dots \dots (2)$$

$$\frac{F_0}{m} = f_0 , \quad w_0^2 = \frac{k}{m} , \quad \frac{R}{m} = 2r \quad \text{بالتعويض عن}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2r \frac{dx}{dt} + w_0^2 x = f_0 \sin pt \dots (3)$$

معادلة الاهتزازات القسرية

الحل العام لمعادلة الحركة للمهتز المضمحل تحت تأثير قوة خارجية دورية الذي يمثل الحالة المستقرة للاهتزاز القسري هو

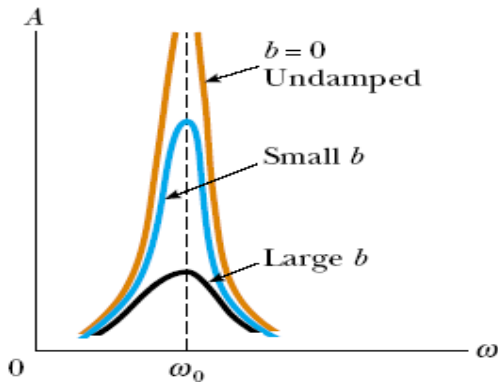
$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(w_0^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}} \sin(p + \varphi) \quad \varphi \text{ زاوية الطور}$$

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(w_0^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}}$$

الرنين :

عندما يضطرب النظام بواسطة قوة مثيرة دورية ويكون ترددها P مساويا مع التردد الطبيعي للمهتز w_0 وتصل سعة الاهتزاز إلى قيمة قصوى فيقال إن النظام في حالة رنين وعندئذ تكون القوة المسلطة في نفس الطور مع السرعة والقدرة المنتقلة إلى المهتز في أقصى ما يمكن والشكل (١) يوضح بأن السعة تعتمد على معامل الاضمحلال حيث كلما صغرت قيمة r كلما زاد وضوح القمة وكلما كبر الاضمحلال زاد عرض القمة وأصبحت أقل حدة .

تردد الرنين : هو التردد القسري p الذي يقابل أعظم سعة في الاهتزاز القسري



أمثلة على عملية الرنين :

- رنين الأرجوحة (يمكن جعل الأرجوحة تستمر في الحركة بإعطائها دفعة صغيرة)
- رنين شوكتين لهما نفس التردد (اهتزاز احدهما يؤدي إلى اهتزاز الشوكة الرنانة الثانية)
- رنين الجسور المعلقة

أو عندما تعرض كوبري في واشنطن بالولايات المتحدة للدمار نتيجة للتردد الرنيني، وحدث ذلك بسبب قوة الرياح والتي هي في العادة لا تكون قوية لتدمير كوبري ولكن عندما تعمل قوة الرياح بتردد

يساوي التردد الطبيعي للكوبري فإن النتيجة تكون كبيرة جدا وقد تبين لاحقا إن هناك خلل في تصميم الكوبري لم يراعي شروط السلامة والأمان. أو في حالة المشي العسكري لفريق من الجيش على كوبري قد يسبب انهيار للكوبري. وفي النهاية فإن ظاهرة الرنين تحدث لأي نظام حقيق يعمل عند تردد قريب من تردده الطبيعي فإننا نتوقع أن يكون هناك اهتزاز بسعة كبيرة.

مثال // كتلة مقدارها 2kg مربوطة بزبرنك ، أعطيت قوة خارجية مقدارها $3\cos 2\pi t$ ، إذا كان ثابت القوة للزبرنك 20N/m أوجد ١- زمن الاهتزاز ، ٢- سعة الحركة بفرض عدم وجود إخماد (اضمحلال) للحركة.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1\text{sec} \quad -1$$

٢- عدم وجود اضمحلال فإن $r=0$

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + (2rp)^2}} = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - p^2)^2 + 0}}$$

$$p = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{20}{2}} = \sqrt{10} = 3.16 \text{ rad/sec}$$

$$A = \frac{3/2}{\sqrt{(4\pi^2 - (3.16)^2)^2}} = \frac{1.5}{\sqrt{(39.478 - 9.985)^2}} = \frac{1.5}{29.493} = 0.059\text{m} = 5.09\text{cm}$$

