**رياضيات الميكانيك الاحصائي**

المقدمة

يمكن وصف حركة الأجرام التي نلاحظها حولنا بنجاح باستخدام الميكانيك التقليدي (ميكانيك نيوتن) مثل قوانين الزخم و الطاقة و القوة على اعتبار ان هذه الأجرام أو الجسيمات محددة الابعاد في الفضاء ويمكن ملاحظتها, ولقد طبقت هذه القوانين بنجاح على حركة الأجرام السماوية وكذلك جزيئات الغاز المتأثرة بصورة ضعيفة مع بعضها البعض لغرض وصولها إلى حالة الاتزان فيما يخص توزيع السرع و الكثافة و الضغط .....الخ.

ولقد افترض ان جزيئات الغاز المثالي غير متميزة لانها غير محددة الموقع في الفضاء فليست لها سرع أو مواقع محددة. اما الجسيمات المثبتة في مواقعها مثل الذرات في الهيكل البلوري للمادة فانها تعتبر متميزة الذرة لانها تتذبذب في مواقع معينة في الهيكل البلوري. و لقد اثبتت التجارب بان الخواص الاساسية في الطبيعة مثل الالكترونات و النيترونات أو مجاميعها من الجزيئات و الذرات تخضع لقوانين مقيدة اضافية مثل مبدأ تكميم الطاقة و الزخم و قوانين الامتصاص و الانبعاث الفوتوني أو قواعد الانتقاء و مبدأ عدم الدقة و قانون باولي. ولقد ادت هذه القوانين إلى ارغامنا على الاعتماد بصورة متزايدة على قوانين ميكانيك التكميم لكونها تفسر شمولية و دقة اكبر تصرف مكونات المادة و خصائصها و بالرغم ان ميكانيك التكميم يعتمد على بعض المفاهيم الفيزيائية البسيطة الا انه يعتمد على اللغة الرياضية المتقدمة بصورة اشمل و الميكانيك الاحصائي يتعامل مع انظمة متعددة الجسيمات و تنتهي الحاجة إلى معرفة الخواص التفصيلية لكل جسيمة (التصادم بينها وبين السطح) و نظرا لكون عدد الجسيمات في النظام عدد كبير جدا فيمكن اعتبار ( اعتماد ) dN من الجسيمات صغيرة جدا مقارنة بالعدد الكلي N لجسيمات النظام.

ولا تقتصر طريقة التحليل الاحصائي على الجزيئات بل تشمل الالكترونات و الفوتونات و امواج المرونة في الجوامد و دوال الموجة وسوف نطلق على هذه الكميات عموما اسم جسيمات.

وتخضع الجسيمات اعلاه إلى ثلاث انواع من الاحصاء بسبب تفاوت خواصها و هي:-

**اولا- احصاء ماكسويل – بولتزمان**

**ثانيا- احصاء بوز- اينشتاين**

**ثالثا – احصاء فيرمي – ديراك**

قبل الدخول في هذه الانواع الثلاثة يجب معرفة مبادئ الاحصاء الكلاسيكي التي تتضمن:-

1. **المجموعة :assembly**  هي كمية من المادة عدد جسيماتها N يمكن التعامل بها كوحدة لها خواصها المنظورة المميزة لها ويقارب عددها No (عدد افوكادرو)
2. **التجمعات الاحصائية :statistical ensemble** و رمزها Ɲ و هي عدد ضخم يؤول الى المالانهاية من المجموعات (Ni) المعرفة في الفقرة التالية

 

فيمثل كل مجموعة كبيرة من الانظمة المتماثلة.

1. **الاحتمالية المنفصلة Discrete probability :** لو فرضنا اننا قد اجرينا تجرب معنية على المجموعة (N) لقياس قيمة المتغير U و المميز لتك المجموعة انه ياخذ القيم المحددة (U1,U2,…..Ui) لغرض الحصول على ادق نتيجة لهذه القيم و للحصول على متوسط هذه القيمة للمتغير U نتبع احدى الطريقتين المتكافئتين التاليتين:-
2. نكرر تجربة القياس لقيمة المتغير U لعدد كبير من المرات على نفس المجموعة N من التجمع الاحصائي Ɲ .
3. نجري تجربة قياس المتغير U مرة واحدة في كل مجموعة من التجمعات الاحصائية فلو استخدما الطريقة الثانية لاظهرت المجموعة N1 القيمة U1 و المجموعةN2 اظهرت القيمة U2 وهكذا إلى ............∞



بقسمة الطرفين على Ɲ ينتج ان

 ----------------(1)

Pi : الاحتمالية



وهي احتمالية اخذ المتغير U للقيمة Ui في المجموعة Ni من التجمعات الاحصائية Ɲ

المعادلة رقم (1) تسمى معادلة الشرط المعياري وهي تبين ان المجموع الكلي لكافة الاحتمالات في تجربة قياس قيمة المتغير U يساوي واحد كذلك اذا كانت (Nr+Ns) هي عدد المجموعات التي تظهر الحدث r مضافا اليه عدد المجموعات التي تظهر الحدث s فان احتمالية وقوع الحدث r أو الحدث s هي:-



**مثال**

عند الرمي العشوائي لقطعة نقود معدنية فانها سوف ترسو باحد وجهيها إلى الاعلى ففي هذا المثال حدثين مختلفين (منفصلين) و متساويين في الحدوث أو الوقوع لذلك المعادلة (2) تصبح:-

P1+P2=1

P1=P2=1/2

**مثال:** عند الرمي العشوائي لحجر النرد سوف يرسو باحد اوجهه الستة باحتمالات متساوية.

P1=P2=P3=P4=P5=P6=1/6

P(1 OR 2)=P1+P2=1/3

1. **الاحتمالات المترابطة Joint probability :**لو فرضنا ان مجموعة N لها خاصيتين مستقلتين هما (s,r) من الممكن ان تظهر احداهما كل على حدة أو تظهر كلتا الخاصيتن بنفس الوقت مثلا نجري تجربة على تجمعات احصائية Ɲ للمجموعة N فنجد ان Nr هو عدد المجموعات التي تظهر الحدث r بغض النظر عن اظهار أو عدم اظهار الحدث الثاني (s) لذا فان:-

 , 

فاذا كانت Ps تمثل حتمالية وقوع الحدث s فان Nrs هو عدد امجاميع التي تظهر الحدثين r و s في نفس الوقت فيجب ان تخضع للعلاقة التالية:-



و من تعريف الاحتمال المركب (Prs) نحصل على:-



و بالمثل نلاحظ انه اذا كانت المجموعة N تظهر ثلاث احداث مستقلة (s,r,t) فان (Psrt) هو عبارة عن ضرب ثلاث احتمالات:-



**مثال**

لو فرضنا ان مجموعة N مكونة من زهرتي نرد متماثلتين في كل شيء عدا علامة صغيرة على احدهما لتميزه عن الآخر احسب الاحتمالية المترابطة عند الرمي العشوائي للزهرين المذكورين.

 , 



1. **الاتزان الاحصائي Statistical equilibrium** : يقال عن أي تجمعات احصائية انها في حالة اتزان احصائي لو ان احتمال وقوع أي حدث ثابت لايعتمد على الزمن فلو ان (t,r,s) هي احداث تظهرها المجموعة واجرينا تجربة على تجمعات احصائية Ɲ للمجموعة N في حالة اتزان لوجدنا ان (Pt,Pr,Ps) ثابتة لا تتغير مع الزمن.
2. **توزيع ذي الحدين The binomial distribution** : اذا اخذنا

مجموعة N من الجسيمات في حالة اتزان احصائي و لتكن المجموعة عبارة عن غاز مثالي تتكون من N جزيئة في وعاء حجمه Vo فالمطلوب حساب قيمة الاحتمالية P لوجود عدد m من الجزيئات في عنصر الحجم ∆V عند الزمن T وان q احتمالية وجود الجزيئات في بقية حجم الوعاء V الذي يساوي:-



فمن الواضح ان:-







و التوزيع المطلوب هو ايجاد احتمالية حدوث P(m) بحيث يتحقق بوقوع حدثين مترابطين, الحدث الاول هو توتجد m جزيئة في عنصر الحجم ∆V ولتكن P1 و الحدث الثاني هو توتجد بقية جزيئات الغاز و عددها (N-m) في الحجم (Vo-∆V) ولتكن P2 وهي احتمالية وقوع الحدث الثاني. أي ان

 , 

و ان التوزيع المذكور يتحقق باكثر من طريقة واحدة و ان عدد الطرق المختلفة لتحقيق التوزيع المطلوب تسمى الوزن الاحصائي لذلك التوزيع ونرمز له بالرمز(gm) و انه يخضع لقانون التباديل للعدد m على العدد N.





و تسمى العلاقة الاخيرة بدالة (توزيع ذي الحدين)