الفصل الثــــــــــــــــاني

إحصاء ماكسويل – بولتزمان

ان الميكانيك الاحصائييحاول ايجاد العلاقة بين الصفات العيانية والصفات المجهرية لمجموعة من الجسيمات وهو يدرس سلوك الاكثر احتمالا لهذه الجسيمات ويتحكم في الميكانيك الاحصائي مجموعة من القوانين تدعى قوانين التوزيع الاحصائي حيث يستخدم في ايجاد الطريقة الاكثر احتمالا لتوزيع كمية معينة من الطاقة بين عدد من الجسيمات . اذا كانت جسيمات متشابهة لها اي برم كان لكنها متباعدة بعضها عن البعض بمسافات كافية بحيث يمكن تمييزها ومثال على ذلك هي الجزيئات الغازية وهذه الجسيمات تخضع لتوزيع ماكسويل. مميزات النظام الخاضع لإحصاء ماكسويل –بولتزمان :

1-وحدات النظام متماثلة متميزة عن بعضها.

2-يخضع لمبدأ الميكانيك الكلاسيكي.

3-يطبق لنظام مثالي معزول.

**1-توزيع الطاقات**

 لو اخذنا مجموعة من الجزيئات (N ) ذات طاقة E1 ,E2 , E3 ,....Ei والمطلوب ايجاد التوزيع الاكثر احتمالا للجزيئات بين الطاقات المختلفة فلدينا قاعدة اساسية في الميكانيك الاحصائي تنص على انه كلما ازاد العدد( $ω$) بالطرق المختلفة لتوزيع الجزيئات بين الخلايا كلما كان احتمال التوزيع اكبر.

$\sum\_{}^{}n\_{i}=n\_{1}+n\_{2}+n\_{3}=N (1)$

ان مفهوم الطاقة تم إدخاله في الإحصاءات الكلاسيكية حيث يتم توزيع الانظمة على الطاقات المختلفة مثل $E\_{1},E\_{2},E\_{3}………E\_{i}…E\_{n}$

وبذلك فان الطاقة الكلية للنظام

 $E\_{Total}=\sum\_{i=1}^{N}E\_{i} (2)$

لتوضيح ذلك يمكن ان نقسم طاقة النظام على شكل شرائح او رفوف متقاربه جدا نرمز لها بالرمز) (Sوبذلك تكون طاقة هذه الشريحة ES لكل رف من الرفوف احتمالاته الممكنة فتمثل بمجموعة من الصناديق على كل رف ويرمز لها بالرمز(gS) في الشريحة (S ) ويسمى وزن الشريحة او درجة انحلال الشريحة وعدد الجسيمات في كل خلية تمثل بكرات داخل هذه الصناديق تمثل بالعدد(nS) ويسمى رقم الاشغال في الشريحة s . رقم الاشغال الكلي يعطى بالعلاقة التالية.

$\sum\_{s=1}^{n}n\_{s}=N\_{Total} (3)$

وبذلك تكون طاقة النظام في الشريحة (s) تعطى بالعلاقة التالية

$E=(n\_{s}\*E\_{s})$

وعلية تكون الطاقة الكلية للمجموعة

$\sum\_{s=1}^{n}n\_{s}\*E\_{s}=E\_{Total} (4)$

**E3**

**g3=4 ,N3=5**

**E2**

**g2=4 ,N2=4**

**g1=1 ,N1=3**

**E1**

الشكل(1)

مثلا لو كان لدينا أربع جزيئات مثل abcd

فهنالك أربع وعشرون طريقة ترتيب لهذه الجسيمات الاربع حسب قيمة المقدار

4!=4\*3\*2\*1=24

وهذه الطرق هي :

abcd bacd cabd dabc

abdc badc cadc dacb

acbd bdac cbad dbac

acdb bdca cbda dbca

adbc bcda cdab dcab

adcb bcad cdba dcba

وعموما الترتيب العام لمجموعة ارقام النظام في شريحة الطاقة يشير الى الحالة الظاهرية وبذلك يكون الترتيب المعين للمجموعة داخل النظام تعطي حالة الطاقة التي تشير الى الحالة المجهرية وبذلك الأرقام الكبيرة للحالة المجهرية تقابل حالة ظاهرية.

عدد طرق التوزيع او الاختيارات هو (C) لأشغال اول شريحة طاقة

$$C\_{ni}^{N}=\frac{N!}{n\_{i}!(N-n\_{i})!} (5)$$

لأشغال الشريحة الثانية

$$C\_{n2}^{(N-n\_{1})}=\frac{(N-n\_{1})!}{n\_{2}!(N-n\_{1}-n\_{2})!} (6)$$

,وبذلك عدد الاختيارات الكلية يعطى بالعلاقة التالية

$$C\_{ni}^{N}× C\_{n2}^{(N-n\_{1})}×C\_{n3}^{(N-n\_{1}-n\_{2})}=\frac{N!}{n\_{i}!(N-n\_{i})!} ×\frac{(N-n\_{1})!}{n\_{2}!(N-n\_{1}-n\_{2})!}×\frac{(N-n\_{1}-n\_{2})!}{n\_{2}!(N-n\_{1}-n\_{2}-n\_{3})!}$$

هذا الاختيار الكلي لثلاث شرائح طاقة

مثال/ ما هو عدد طرق اختيار 2 وحده من 5 وحدات لأشغال اول شريحة .

الحل/

$$C\_{2}^{5}=\frac{5!}{2!(5-2)!}=\frac{5×4×(3×2×1)}{2(3×2×1)}=10$$

مثال/ 5وحدات نختار 2 لأشغال اول شريحة طاقة ثم نختار من الباقي 2 لأشغال الشريحة الثانية فما هو عدد الاختيارات لأشغال الشريحة الثانية .

الحل/

$$C\_{n2}^{(N-n\_{1})}=\frac{(N-n\_{1})!}{n\_{2}!(N-n\_{1}-n\_{2})!}⇔C\_{2}^{(5-2)}=\frac{(5-2)!}{2!(5-2-2)!}=\frac{3!}{2!}=3$$

مثال / احسب مجموع الاختيارات إذا كان لديك 100 وحده نختار 10 وحدات لأشغال الشريحة الأولى و10 من الباقي لأشغال الشريحة الثانية و30 من الباقي لأشغال الشريحة الثالثة 40 من الباقي لأشغال الشريحة الرابعة.

لاستخراج الترتيب الدقيق يمكن ان نضع رقم الاشغال ns على وزن الشريحة وبذلك يكون $g\_{s}^{n\_{s}}$ وعلية تكون طرق الترتيب لرقم الاشغال في الشريحة.

$$w=\frac{N!}{n\_{1} !n\_{2}!n\_{3}!……n\_{s}!}\left(g\_{1}^{n\_{1}}×g\_{2}^{n\_{2}}×….g\_{s}^{n\_{s}} \right) (7)$$

وزن التوزيع المجهري

وزن التوزيع الظاهري

وبصورة عامة

$$w=Ni\prod\_{1}^{s}(\frac{g\_{s}^{n\_{s}}}{n\_{s}!}) (8)$$

هذا التعبير لاحتمالية التوزيع الدقيق لماكسويل- بولتزمان

مثال / اربع جسيمات (a,b,c,d) تتوزع على شريحتين طاقة جسيمتين في الشريحة الأولى وجسيمتين في الشريحة الثانية مع ثلاث خلايا(وزن)في الشريحة الأولى واربع خلايا في الشريحة الثانيه ماهي عدد الحالات المجهرية.

الحل /عدد الجسيماتN=4

$$n\_{1}=2\rightarrow g\_{1}=3$$

$$n\_{2}=2\rightarrow g\_{2}=4$$

$$w=Ni\prod\_{i=1}^{n}(\frac{g\_{s}^{n\_{s}}}{n\_{s}!})=4!\*\left(\frac{3^{2}}{2!}×\frac{4^{2}}{2!}\right)$$

$$=4!\*\left(\frac{9}{2}×\frac{16}{2}\right)=864$$

مثال/ اشتق احتمالية التوزيع في إحصاء ماكسويل- بولتزمان

الحل/

 رقم طرق الاختيار لn من الجسيمات لشريحة الطاقة الأولى من العدد الكلي من الجسيمات يعطى بالمعادلة التالية

$$C\_{ni}^{N}=\frac{N!}{n\_{i}!(N-n\_{i})!}$$

وعدد الاختيارات للشريحة الثانية هو $C\_{n2}^{(N-n\_{1})}=\frac{(N-n\_{1})!}{n\_{2}!(N-n\_{1}-n\_{2})!}$

وبذلك فان عدد الاختيارات الكلية لتوزيع الجسيمات على ثلاث شرائح طاقة يعطى بالعلاقة التالية

$$w=\frac{N!}{n\_{1} !n\_{2}!n\_{3}!}$$

يمكن ان نضع $n\_{s}$ على $g\_{s}$ فيصبح $(g\_{s}^{n\_{s}})$ وبذلك يكون الترتيب الكلي ل $n\_{s}$ جسيمة على الشرائح هو

$$w=\frac{N!}{n\_{1} !n\_{2}!n\_{3}!……n\_{s}!}(g\_{1}^{n\_{1}}×g\_{2}^{n\_{2}}×….g\_{s}^{n\_{s}} )$$

$$w=Ni\prod\_{1}^{s}(\frac{g\_{s}^{n\_{s}}}{n\_{s}!})$$

*مثال /نفترض خليتين i وj في فضاء الطور واربع جسيمات موزعة على الخليتين احسب التوزيع الدقيق او جد الحالات المجهرية والظاهرية (الجاهرية) .*

الحل/

|  |  |
| --- | --- |
|  4 3 2 1 0 | *Ni* |
| 0 1 2 3 4 | *NJ* |

$$w=Ni\prod\_{i=1}^{n}(\frac{g\_{s}^{n\_{s}}}{n\_{s}!})$$

$$w\_{1}=4!\*\left(\frac{1^{4}}{4!}×\frac{1^{0}}{0!}\right)=1$$

$$w\_{2}=4!\*\left(\frac{1^{3}}{3!}×\frac{1^{1}}{1!}\right)=4$$

$$w\_{3}=4!\*\left(\frac{1^{2}}{2!}×\frac{1^{2}}{2!}\right)=6$$

$$w\_{4}=4!\*\left(\frac{1^{1}}{1!}×\frac{1^{3}}{3!}\right)=4$$

$$w\_{5}=4!\*\left(\frac{1^{0}}{0!}×\frac{1^{4}}{4!}\right)=1$$

$$w=1+4+6+4+1=16$$

عدد الحالات المجهرية 16 يقابلها 5حالات جاهرية او (ظاهرية)

مثال / ستة جسيمات مميزه موزعة على ثلاث مستويات طاقة غير متحللة (gs=1) المستوي الأول طاقته صفر والمستوي الثاني يمتلك طاقة مقدارها E والمستوي الثالث2E. احسب

1-العدد الكلي للحالات المجهرية

2-احسب عدد الحالات المجهرية التي تحتوي على ثلاث جسيمات في المستوي الأول و2 في المستوي الثاني وواحده في المستوي الثالث.

3- جد طاقة اعظم توزيع .

4- احسب العدد الكلي للحالات المجهرية اذا كان المجموع الكلي للطاقة لست جسيمات تساوي 5E.

الحل/

|  |  |
| --- | --- |
|  6 5 4 4 3 3 2  | الأول |
|  0 1 2 1 2 3 2 | الثاني |
|  0 0 0 1 1 0 2 | الثالث |
|  (3) (6) (6) (3) (6) (3) (1) | عدد حالات التوزيع |

1-

$$w\_{1}=6!\*\left(\frac{1}{6!}×\frac{1}{0!}×\frac{1}{0!}\right)=1×3=3$$

$$w\_{2}=6!\*\left(\frac{1}{5!}×\frac{1}{1!}×\frac{1}{0!}\right)=6×6=36$$

$$w\_{3}=6!\*\left(\frac{1}{4!}×\frac{1}{2!}×\frac{1}{0!}\right)=15×6=90$$

$$w\_{4}=6!\*\left(\frac{1}{4!}×\frac{1}{1!}×\frac{1}{1!}\right)=30×3=90$$

$$w\_{5}=6!\*\left(\frac{1}{3!}×\frac{1}{2!}×\frac{1}{1!}\right)=60×6=360$$

$$w\_{6}=6!\*\left(\frac{1}{3!}×\frac{1}{3!}×\frac{1}{0!}\right)=20×3=60$$

$$w\_{7}=6!\*\left(\frac{1}{2!}×\frac{1}{2!}×\frac{1}{2!}\right)=90×1=90$$

$$W\_{Total}=729$$

2-

$$w=Ni\prod\_{i=1}^{n}(\frac{g\_{s}^{n\_{s}}}{n\_{s}!})=6!\*\left(\frac{1}{3!}×\frac{1}{2!}×\frac{1}{1!}\right)=60$$

3- اعظم طاقة في حالة2,2,2) )

$$2×0+2×E+2×2E=6E$$

4- عدد الحالات المجهرية التي تحقق الطاقة 5E

$$n\_{1}E\_{1}+n\_{2}E\_{2}+n\_{3}E\_{3}=5E$$

$$3×0+1×E+2×2E=5E, W=6!\*\left(\frac{1}{3!}×\frac{1}{1!}×\frac{1}{2!}\right)=60$$

$$2×0+3×E+1×2E=5E, W=6!\*\left(\frac{1}{2!}×\frac{1}{3!}×\frac{1}{1!}\right)=60$$

$$1×0+5×E+0×2E=5E, W=6!\*\left(\frac{1}{1!}×\frac{1}{5!}×\frac{1}{0!}\right)=6$$

$$W=126$$