الداله المولده للعزوم :

يرمز لها بالنسبه للمتغير العشوائي X بالرمز $M_X(t)$ وهي

تعرف في حاله الحصول اليها

$$M_X(t)=E(e^{tX})$$

$$=\sum e^{tx}p(x) \qquad X \text{ متقطع}$$

$$=\int e^{tx}f(x)\,dx \qquad X \text{ مستمر}$$

حيث t معلمه حقيقيه . وعلى فرض ان الطرف الايمن من العلاقه اعلاه متقارب بالمطلق فان

$$M_X(t)=E(e^{tX})=E\left[1+tX+\frac{t^2}{2!}X^2+\frac{t^3}{3!}X^3+\cdots\right]$$

$$=\left[1+tE(X)+\frac{t^2}{2!}E(X^2)+\frac{t^3}{3!}E(X^3)+\cdots\right]$$

$$=1+tm_1+\frac{t^2}{2!}m_2+\frac{t^3}{3!}m_3+\cdots=\sum_0^\infty \frac{t^r m_r}{r!} \qquad *$$

حيث m_r هو العزم الرائي حول نقطه الاصل للمتغير X . وبأخذ المشتقه للعلاقه * بالنسبه الى t ولـ K من المرات ونضع $t=0$ نحصل على

$$\left.\frac{d^k M_X(t)}{dt^k}\right|_{t=0}=m_r \qquad k=1,2,\dots$$

من الواضح بأن

$$P(t)=E(t^x)=E(e^{x\ln t})=M_X(\ln t)$$

ملاحظه : اذا وضعنا $Y=cX$ حيث c ثابت

$$\therefore M_Y(t)=E(e^{tY})=E(e^{tcX})=E[(e^{tc})^X]=M_X(tc)$$

نظريه : عندما $Y=\frac{X+a}{b}$ فان

$$M_Y(t)=e^{\frac{a}{b}t}\cdot M_X\left(\frac{t}{b}\right)$$

نظريه : اذا كان X و Y متغيرين مستقلين بالدوال المولده للعزوم $M_X(t)$ و $M_Y(t)$ لذلك تكون الداله المولده للعزوم الى $Z=X+Y$ هي

$$M_Z(t)=M_{X+Y}(t)=M_X(t)\cdot M_Y(t)$$

ملاحظه : اذا كان $Z=X_1+\cdots+X_n$ فان $M_Z(t)=\prod_1^n M_{X_i}(t)$ حيث $X_1,X_2,\dots,X_n$ متغيرات مستقله .

اذا كانت $X_1,X_2,\dots,X_n$ متغيرات مستقله لها نفس التوزيع فان الداله المولده للعزوم الى $Z=\sum X_i$ هي $M_Z(t)=[M_X(t)]^n$

مثال: اذا كان X متغير عشوائي له توزيع بواسون بالمعلمة m فان

$$M_x(t) = e^{m(e^t-1)}$$

وان الوسط الحسابي هو

$$\frac{dM_x(t)}{dt}\Big|_{t=0} = e^{m(e^t-1)} \cdot me^x\Big|_{t=0}$$

$$= m$$

$$\frac{d^2M_x(t)}{dt^2}\Big|_{t=0} = e^{m(e^t-1)} \cdot m^2e^{2t} + me^t \cdot e^{m(e^t-1)}\Big|_{t=0} = m^2+m$$

$$\therefore \operatorname{var}(X) = m^2+m-m^2 = m$$

مثال: اذا كان X متغير عشوائي له توزيع اسي $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x>0$

$$\therefore M_x(t) = \int_0^\infty e^{tx} \cdot \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \int_0^\infty \lambda e^{-x(\lambda-t)}\,dx = \frac{-\lambda}{\lambda-t} e^{-x(\lambda-t)}\Big|_0^\infty$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda+t}$$

مثال: اذا كان X متغير عشوائي له توزيع طبيعي قياسي فان

$$M_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tz} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\,dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z^2-2tz)}\,dz$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z-t)^2} \cdot e^{t^2/2}\,dz = e^{t^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(z-t)^2}\,dz$$

فاذا فرضنا $z-t=u$ ستكون $dz=du$

$$\therefore M_z(t) = e^{t^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,du = e^{t^2/2}$$

اذا فرضنا $X \sim N(\mu,\sigma^2)$ فان $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$ ستكون

$$e^{t^2/2} = e^{-\mu t/\sigma} \cdot M_x\left(\frac{t}{\sigma}\right) = e^{-\mu t/\sigma} \cdot e^{\mu t/\sigma} \cdot e^{t^2/2} = \cancel{e^{\mu t + t^2\sigma^2/2}}$$

$$\therefore M_x(t) = e^{\mu t + t^2\sigma^2/2}$$