

NUMERICAL ANALYSIS

التحليل العددي

في حياتنا العملية ليس من الضرورة اعتماد قيم مضبوطة دائماً لحل مسألة رياضية أو هندسية أو أية مشكلة في حقل من الحقول العلمية، بل يمكن الاستعانة بقيم تقريبية لذلك. إن وسائل إيجاد هذه الحلول التقريبية تسمى بالخوارزميات نسبة إلى العالم العربي الخوارزمي الذي ألف أول كتاب في الجبر والمقابلة ووضع فيه المبادئ الأساسية لهذا الموضوع.

إن معظم الخوارزميات المصممة لحل مسألة معينة، تسمح بإيجاد الحل بأية دقة مطلوبة باستخدام عدد محدود من الخطوات وهذه الحلول تسمى بالحلول العددية (Numerical Solutions). أما الموضوع المتعلق بدراسة الطرق المستخدمة في إيجاد الحلول العددية والنظريات المتعلقة بها فيسمى بالتحليل العددي (Numerical Analysis).

RESOURCES OF ERRORS

مصادر الأخطاء

بما أن الحل العددي لمسألة ما يكون عادة قيمة تقريبية للحل المضبوط لتلك المسألة، لذا تكون هذه القيمة محملة بأخطاء من المهم قياسها لمعرفة دقة الحل العددي. ولأجل تقليل الخطأ في الحل العددي علينا معرفة المصادر المسببة لهذا الخطأ والسيطرة عليه. هذه الأخطاء يمكن أن تصنف كالآتي:

Formulation Error

أولاً: أخطاء الصياغة

عندما يراد تحليل مشكلة معينة بطريقة رياضية، غالباً ما نأخذ نموذجاً مبسطاً يصف المشكلة الأساسية. أي قد نهمل بعض العوامل والمؤثرات إذا رأينا بأنها تبسط النموذج وفي نفس الوقت لا تؤثر على المظهر الأساسي للمشكلة. إن النتائج التي نحصل عليها من النموذج المبسط هذا عادة تكون محملة بأخطاء تسمى بأخطاء الصياغة.

على سبيل المثال وصف أينشتاين العلاقة بين تعجيل جسم متحرك والقوة المؤثرة عليه بالنموذج الرياضي:

$$f = \frac{d}{dt}(mv)$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

حيث ترمز:

f للقوة، m_0 لكتلة الجسم في حالة السكون، v سرعة الجسم، c سرعة الضوء. ولما كانت قيمة v^2 صغيرة جداً بالنسبة إلى c^2 يمكن تبسيط النموذج إلى:

$$f = \frac{d}{dt} (m_0 v) = m_0 a$$

حيث يرمز a لتعجيل الجسم.

Inherent Errors

ثانياً: الأخطاء الصليبية

في مختلف المسائل العلمية يتم الحول على البيانات (**data**) الخاصة بالمسألة بالملاحظة أو القياس، والدقة في هاتين الحالتين محدودة، أي إن البيانات تعاني من الأخطاء أساساً (أي قبل البدء باستخدام خوارزمية معينة لإيجاد الحل التقريبي للمسألة). وهذا النوع من الأخطاء يسمى بالأخطاء الصليبية.

وهذه التسمية تطلق أيضاً على الأخطاء في البيانات غير النسبية (مثل $\sqrt{2}$ ، π ، e) حيث لا يمكن تمثيلها بشكل مضبوط بل تمثل بأعداد تقريبية لها.

Rounding and Chopping

ثالثاً: أخطاء التدوير والقطع

إن واحداً من أهم مصادر الأخطاء هو استعمال الأعداد المدورة بدلاً من المضبوطة. على سبيل المثال العددين 0.045651 و 9033 يتم تدويرهما إلى العددين 0.0457، 9030 على التوالي عندما نريد أن نستخدم ثلاثة أرقام مميزة فقط. هذا النوع من الأخطاء يسمى بخطأ التدوير.

إن الآلات الحاسبة الإلكترونية لا تدور الأعداد عادة وإنما تقطعها. على سبيل المثال فهي تحول العددين 0.045651، 9033 إلى 0.0456، 9030 على التوالي في حالة استخدام ثلاثة أرقام مميزة. هذا النوع من الأخطاء يسمى بخطأ القطع وقيمته في معظم الحالات أكبر من قيمة خطأ التدوير.

Truncation Errors

رابعاً: أخطاء البتر

عندما تكون لدينا دالة f معرفة على شكل متسلسلة غير منتهية من الحدود فإن قيمة $f(x)$ لا يمكن احتسابها باستخدام جميع حدود المتسلسلة، بل نتوقف بعد حساب عدد محدود من الحدود. هذا التوقف يسبب خطأ في قيمة $f(x)$ (يساوي مجموع الحدود المحدودة) ويسمى بخطأ البتر.

على سبيل المثال لنفترض أن الدالة f معرفة كما يأتي:

$$F(x) = 1 - \cos x.$$

فتكون متسلسلة تيلر للدالة f حول النقطة $x=0$:

$$f = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \dots$$

وإذا احتسبنا قيمة $f(a)$ من الحدود الثلاثة الأولى فإن خطأ البتر في الناتج يساوي:

$$T = -\frac{a^8}{8!} + \frac{a^{10}}{10!} - \frac{a^{12}}{12!} + \dots$$

وهو عبارة عن سلسلة غير منتهية وفي أغلب الأحيان لا يمكن حسابه تماماً ولكن يمكن أن نجد حداً أعلى له.

Accumulated Error

خامساً: الخطأ المتراكم

بعض الطرق العددية مثل الحلول العددية للمعادلات التفاضلية تتضمن تكراراً لمجموعة من العمليات الحسابية لخطوات متعاقبة. الخطأ في كل خطوة يزداد لاعتماد الحسابات على القيم التقريبية المحسوبة في الخطوات السابقة مما يسبب بالنتيجة خطأ يسمى بالخطأ المتراكم.

تمثيل الأعداد

يمكن تمثيل الأعداد بصورة عامة بعدة طرق وذلك تبعاً للنظام المتبع. فقد استخدم البابليون الأساس 60 للتعبير عن الأعداد. وهناك حضارات أخرى اعتمدت أساسات أخرى مثل 12 و 20 في الحاسبات الإلكترونية يستخدم الأساس 2 لتمثيل الأعداد.

نظام العد العشري:

وهو النظام المستخدم حالياً في جميع أرجاء العالم والسبب في انتشار النظام العشري هو وجود أصابع اليد العشرة. إن اكتشاف الإنسان للنظام العشري وتطويره بشكله الحالي المألوف بعد إضافة الصفر إليه وإعطاء أهمية لموقع المرتبة المكانية للرقم أثر بالغ في تطور الرياضيات والعلوم التي تعتمد عليها وأصبحت عملية الطرح والضرب والقسمة لا تتطلب مجهود فكري كبير. وكانت سهولة النظام العشري من العوامل المساعدة لقيام الإنسان باختراع آلات ميكانيكية تستعمل للعمليات الحسابية.

والنظام العشري يستخدم عشرة رموز وهي (0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9) ويعتمد على الأساس 10.

أن أي عدد حقيقي في النظام العشري يمكن أن يكتب على شكل متسلسلة أساسها 10 ومعاملاتها أعداد صحيحة تتراوح قيمها بين 0 و 9 وتسمى الأرقام العشرية. فإذا كان x عدداً حقيقياً موجباً:

$$x = (a_n a_{n-1} \dots a_0 . b_1 b_2 \dots)_{10}$$

أي إن قيمة x تمثل مجموع المتسلسلتين:

$$\sum_{k=0}^n a_k \times 10^k + \sum_{k=1}^{\infty} b_k 10^{-k}$$

الجزء الصحيح
الجزء الكسري

من الممكن تعريف أو بناء أنظمة عددية تعتمد على الأساس (2) أو (3) أو (4) أو ... الخ ، ويكون عدد الرموز في أي واحد من هذه الأنظمة يساوي الأساس نفسه.

اسم النظام	الأساس	رموز الأرقام
النظام الثنائي	2	1 ، 0
النظام الثلاثي	3	2 ، 1 ، 0
النظام الرباعي	4	3 ، 2 ، 1 ، 0
النظام الخماسي	5	4 ، 3 ، 2 ، 1 ، 0
النظام السداسي	6	5 ، 4 ، 3 ، 2 ، 1 ، 0
النظام السباعي	7	6 ، 5 ، 4 ، 3 ، 2 ، 1 ، 0
النظام الثماني	8	7 ، 6 ، 5 ، 4 ، 3 ، 2 ، 1 ، 0
النظام التساعي	9	8 ، 7 ، 6 ، 5 ، 4 ، 3 ، 2 ، 1 ، 0

النظام الثنائي:

النظام الثنائي يعتمد على الأساس (2) والرموز المستخدمة هي (0، 1) فقط والعمليات الحسابية في هذا النظام لا تختلف كثيرا عن المستخدمة في النظام العشري. يمكن تمثيل أي عدد فيه يسلسلة من الرقمين (0، 1) ويكون الترتيب في العد لهذا النظام كالتالي:

0، 1، 10، 11، 100، 101، 110، 111، 1000، 1001، 1010، ... الخ.

0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، 10، ... الخ.

• تحويل الأعداد من النظام العشري إلى النظام الثنائي

في هذه الطريقة نقسم العدد المراد تحويله على أساس النظام المراد تحويل العدد إليه باستمرار إلى أن نصل إلى الناتج (0) وبواقي القسمة هي التي تشكل العدد المطلوب.

مثال: حول العدد (224) إلى النظام الثنائي بطريقة القسمة.

العدد	الأساس	الباقى
224	2	0
112	2	0
56	2	0
28	2	0
14	2	0
7	2	1
3	2	1
1	2	1
0		

الآحاد ←

الرقم الناتج هو (11100000).

واجب:

أ. حول الأعداد العشرية التالية إلى النظام الثنائي:

1. (10) 2. (22) 3. (101) 4. (512) 5. (125) 6. (313)

• تحويل الأعداد من النظام الثنائي إلى النظام العشري:

مثال: حول العدد الثنائي (11100000) إلى النظام العشري.

$$\begin{aligned}
 11100000 &= 0 \times 2^0 + 0 \times 2^1 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^5 + 1 \times 2^6 + 1 \times 2^7 \\
 &= 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 32 + 64 + 128 \\
 &= 224.
 \end{aligned}$$

واجب: حول الأعداد الثنائية التالية إلى أعداد عشرية:

1. (100001) 2. (10010011) 3. (111101111)

4. (111000001) 5. (1110101)