طريقة نيوتن – رافسون: NEWTON – RAPHSON METHOD

عندما تكون مشتقة الدالة f بسيطة ومن السهل إيجادها فإن الجذور الحقيقية للمعادلة f(x)=0 يمكن إيجادها بدقة عالية باستخدام طريقة نيوتن – رافسون. إن الفكرة الأساسية لهذه الطريقة تعود إلى العالم نيوتن، ولكن الصيغة المستخدمة حالياً تعود إلى العالم رافسون. لاشتقاق الصيغة العامة للطريقة، نفرض بأن لدينا قيمة تقريبية أولية للجذر المطلوب λ ولتكن x_0 ونفرض أن h تمثل مقدار التصحيح الذي يجب أن نضيفه للقيمة x_0 لنحصل على الجذر المطلوب λ، أي إن:

$$\lambda = x_0 + h$$

$$f(x_0 + h) = f(\lambda) = 0$$

وبتطبيق توسيع تايلر للدالة f حول x_0 نحصل على:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0 + \theta h), \qquad 0 < \theta < 1$$

فإذا افترضنا أن قيمة h صغيرة فإن باستطاعتنا إهمال الحد الأخير الذي يحوي h^2 فنحصل على العلاقة:

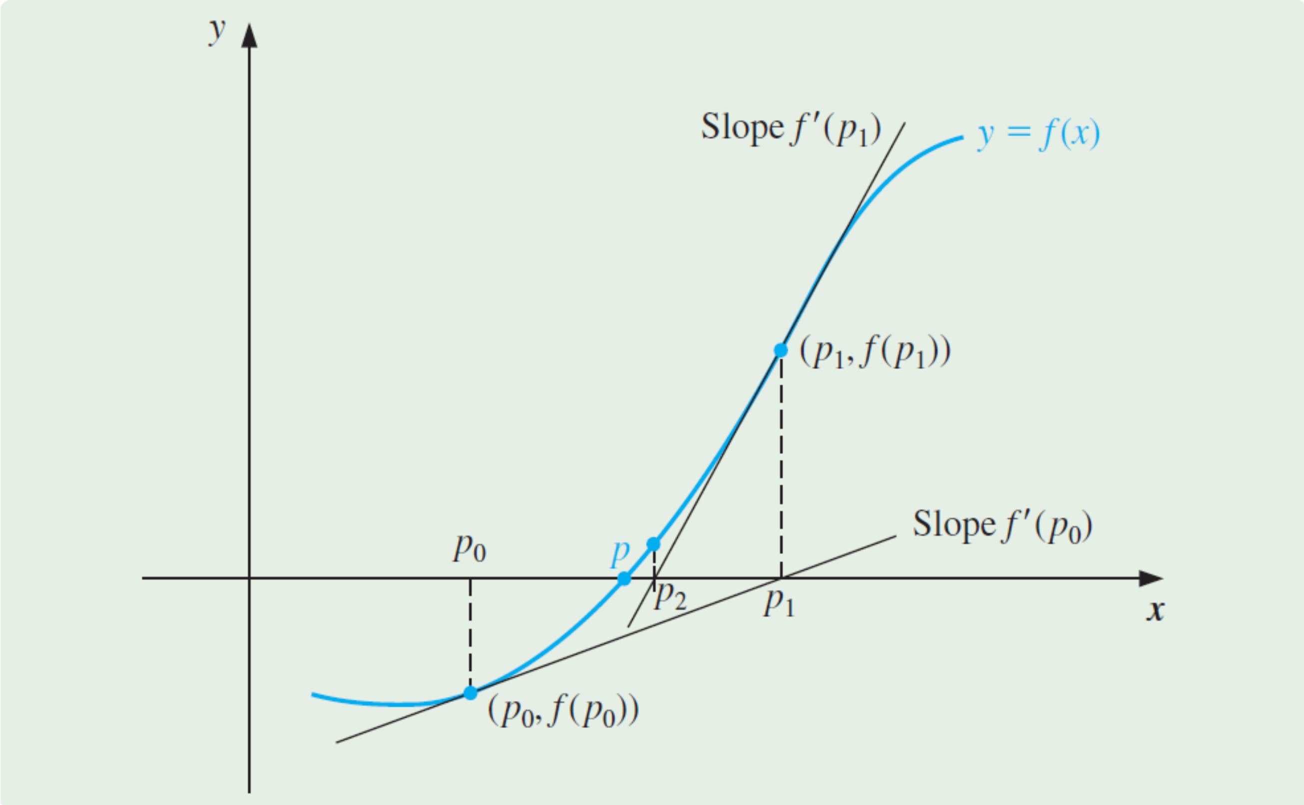
$$f(x_0) + hf'(x_0) = 0$$

$$h_1 = h = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

فتصبح القيمة التقريبية المحسنة للجذر:

$$x_1 = x_0 + h_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

المخطط التالي يبين كيف تعمل طريقة نيوتن – رافسون.



يبين هذا الشكل كيفية عمل طريقة نيوتن رافسون

طريقة أخرى لاشتقاق القانون الذي تعتمد عليه طريقة نيوتن وهي بالاعتماد على ميل المستقيم المار بالنقطة x_1 حيث أن ميل المستقيم (وهو يساوي مشتقة الدالة في تلك النقطة)

$$slop = f'(x_0) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

نفترض أن $f(x_1)=0$

$$f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

وبالتالي:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

حيث أن $f(x_0)/f'(x_0)$ تمثل Δx (التغير في قيمة x).

خوارزمية طريقة نيوتن:

1. نختار قيمة تخمينية ابتدائية للجذر الجديد ولتكن x_0.
2. نحسب قيمة $f(x_0)$.
3. نحسب قيمة $f'(x_0)$.
4. نحسب القيمة التقريب الجديد للجذر من المعادلة:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

5. اطبع قيمة x_1.
6. إذا كان $|x_1 - x_0|<\varepsilon$، إذاً x_1 هو الجذر الجديد، اذهب إلى الخطوة الأخيرة.
7. $x_0 = x_1$، اذهب إلى الخطوة رقم 2.
8. توقف.

مثال: أوجد جذر للمعادلة التالية باستخدام طريقة نيوتن – رافسون بخطأ $\varepsilon=0.0001$:

$$f(x) = x^2 - 4\sin x$$

الحل:

نختار $x_0 = 3$، $f'(x)=2x-4\cos(x)$

$f(x_0)=8.4355$

$f'(x_0)=9.9600$

$$x_1 = 3 - \frac{8.4355}{9.9600} = 2.1531$$

$|x_1 - x_0| = |2.1531 - 3| = 0.8469$

$x_0 = x_1 = 2.1531$

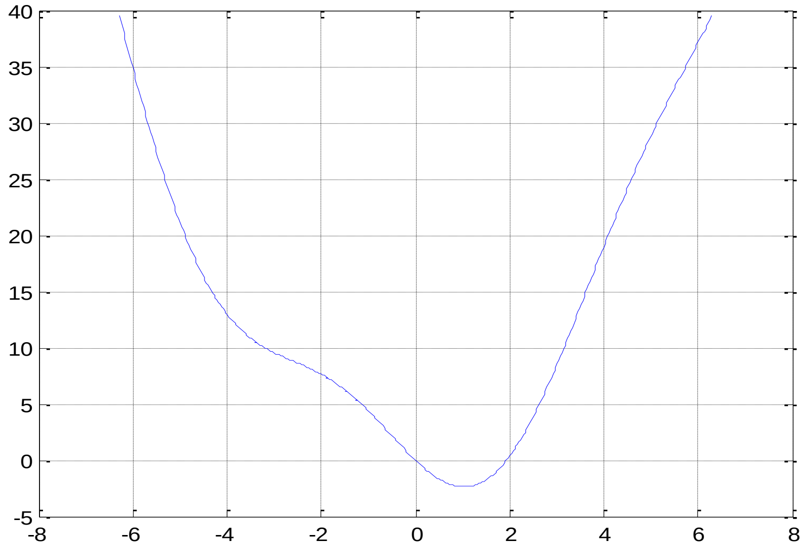
$$x_1 = 2.1531 - \frac{1.2948}{6.5058} = 1.9540$$

$|x_1 - x_0| = |1.9540 - 2.1531| = 0.1991$

⋮

نستمر في الحل إلى أن نصل إلى الجذر المطلوب.

نلاحظ رسم هذه الدالة في الشكل التالي:



مخطط الدالة $f(x) = x^2 - 4\sin x$

البرنامج بلغة الـ MATLAB:

```
%%        THIS PROGRAM IS USED TO COMPUTE
%%                ROOT OF F(X)=0
%%              USING NEWTON METHOD
f=inline('x^2-4*sin(x)');
d=inline('2*x-4*cos(x)');
x0=input('x0=   ');
n=input('n=    ');
disp('       x0         x1')
for i=1:n
    if d(x0)==0
        disp('division by zero, can not proceed.')
        break
    end
    x1=x0-f(x0)/d(x0);
    disp([x0 x1])
    if abs(x1-x0)<=0.0001
        break
    else
        x0=x1;
    end
end
```

<u>النتائج التي نحصل عليها بعد التنفيذ:</u>

```
   x0         x1
3.0000    2.1531
2.1531    1.9540
1.9540    1.9340
1.9340    1.9338
1.9338    1.9338
```

<u>ملاحظات حول طريقة نيوتن:</u>

- طريقة نيوتن رافسون هي أسرع طريقة لإيجاد جذور معادلة معينة، ولكنها تتطلب أن تكون الدالة قابلة للاشتقاق ومشتقتها معروفة.
- عند اختيار تخمين أولي x_0 جيد للجذر المطلوب فإن الطريقة سوف تكون سريعة جداً في إيجاد الجذر المطلوب. وعلى العكس إذا كان التخمين الأولي غير جيد فقد تتباعد عن الجذر المطلوب.
- يلاحظ من القانون المستخدم في طريقة نيوتن لاستخراج إحداثيات النقطة الجديدة أنه كلما كبرت المشتقة $f'(x_0)$ صغرت قيمة التصحيح h المطلوب إضافتها للحصول على الجذر المضبوط. وهذا يعني أن الاقتراب للجذر يكون سريعاً وفعالاً عندما يكون المماس لمنحني الدالة قرب النقطة x_0 شاقولياً تقريباً.
- من ناحية أخرى، فإن قيمة h تصبح كبيرة عندما تكون المشتقة $f'(x_0)$ قريبة من الصفر، وبهذا يكون الاقتراب للجذر بطيء أو قد لا يكون هناك تقارب على الإطلاق. لذا لا يستحسن استخدام هذه الطريقة عندما يكون منحني الدالة f موازٍ تقريباً إلى المحور x في النقاط القريبة من الجذر. يستحسن في مثل هذه الحالة استخدام طريقة الموضع الكاذب أو اختيار قيمة أولية x_0 قريبة جداً من الجذر المضبوط.
- إن الحالة في النقطتين السابقتين أعلاه تجابهنا أيضاً عندما يكون للمعادلة جذرين متقاربين، حيث تكون قيم المشتقة قرب الجذرين قريبة من الصفر.
- يمكن تعميم صيغة نيوتن لتستعمل في حل منظومة من المعادلات غير الخطية.