سابعا : الضرب الثلاثي

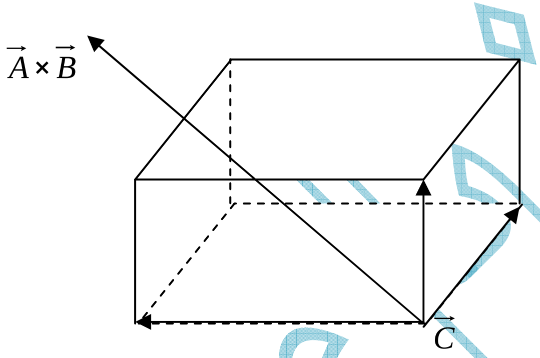
لو اعتمدنا المتجهات الثلاثة $\vec{A}$، $\vec{B}$ ، $\vec{C}$ ومفاهيم الضر وبات (الضرب بكمية عددية، الضرب العددي والاتجاهي لمتجهين) لاستطعنا الحصول على نوعين للضرب الثلاثي هما:

❖ **الضرب الثلاثي العددي**:

لنأخذ متوازي مستطيـلات (الشكل ١-١٢) ونلاحظ أن الكمية العددية $(\vec{A} \times \vec{B}).\vec{C}$ هي حجم متوازي المستطيلات الذي مساحة قاعدته $(\vec{A} \times \vec{B})$ وارتفاعه المائل (جانبه) $\vec{C}$، وعندما تكون المتجهات الثلاثة في المستوى نفسه تكون

$$(\vec{A}\times\vec{B}).\vec{C} = 0$$

ومن ملاحظة الشكل نرى أن:



$$\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C}) = (\vec{A}\times\vec{B}).\vec{C} \qquad \text{............. (19-1)}$$

إذن يمكن أن تتبـادل علامتـا الضـرب فـي الضـرب الثلاثـي العـددي دون أن تتغيـر قيمـة حاصـل الضرب ومع ذلك فان:

$$\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C}) = -\ \vec{A}.(\vec{C}\times\vec{B})$$

ولـذلك فـان حاصـل الضـرب العـددي الثلاثـي لا يتغيـر بتبـديل ترتيـب المتجهـات دوريـاً ولكـن إشـارته تتغير إذا كان تبديل المتجهـات غيـر دوريّ. عنـدما تمثـل المتجهـات الثلاثـة بدلالـة مركباتهـا المتعامـدة نستطيع التعبير عن الضـرب الثلاثي العددي بشكل محدد مثل :

$$\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C}) = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \qquad \text{.............. (20-1)}$$

❖ الضرب الثلاثي ألاتجاهي :

يسـمى التعبيـر $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})$ بالضـرب الثلاثـي ألاتجـاهي وهـو عمـودي علـى المتجهـين $\vec{A}$ و $(\vec{B}\times\vec{C})$. وباستخدام قانون الضرب ألاتجاهي لمتجهين نستطيع أن نحصل على العلاقة الآتية :

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})=(\vec{A}.\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}.\vec{B})\vec{C} \quad ....(21\text{-}1)$$

حيث الضروبات الناتجة هي ضرب متجه بكمية عددية وعلى الطالب إثبات هذه العلاقة للتدريب على الضرب ألاتجاهي وان يستنتج أيضا أن:

$$\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C})\neq(\vec{A}\times\vec{B})\times\vec{C}$$

أي أن قانون التجميع لهذا الضرب لا يصح

مثــال

إذا أعطيت المتجهات $\vec{R_1}=3\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$, $\vec{R_2}=2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$, $\vec{R_3}=\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$

فجد كل من:

1. $(\vec{R_1}\times\vec{R_2})\times\vec{R_3}$ 2. $(\vec{R_1}\times\vec{R_2}).\vec{R_3}$

الحل :

$$1.\ \vec{R_1}\times\vec{R_2}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 3 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{vmatrix}=\hat{i}(1-2)+\hat{j}(4+3)+\hat{k}(3+2)=-\hat{i}+7\hat{j}+5\hat{k}$$

$$(\vec{R}_1 \times \vec{R}_2) \times \vec{R}_3 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & 7 & 5 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \hat{i}\,(14+10) + \hat{j}\,(5+2) + \hat{k}\,(2\text{-}7)$$

$$= 24\,\hat{i} + 7\,\hat{j} - 5\,\hat{k}$$

2. $(\vec{R}_1 \times \vec{R}_2) . \vec{R}_3 = (-\hat{i} + 7\hat{j} + 5\hat{k}).(\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}) = -1-14+10 = -5$

ثامنا : تفاضل المتجه

لنفرض أن مركبات المتجه $\vec{R}$ هي دوال لمتغير واحد وليكن u

$$R(u) = \hat{i}\,R_x(u) + \hat{j}\,R_y(u) + \hat{k}\,R_z(u)$$

وتعرف مشتقة المتجه $\vec{R}$ بالنسبة للكمية u كما يأتي :

$$\frac{d\vec{R}}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \left(\hat{i}\,\frac{\Delta R_x}{\Delta u} + \hat{j}\,\frac{\Delta R_y}{\Delta u} + \hat{k}\,\frac{\Delta R_z}{\Delta u} \right)$$

حيث $\Delta R_x = R_x(u + \Delta u) - R_x(\mathrm{u})$

وهكذا للمركبات z و y ، أي أن:

$$\frac{d\vec{R}}{du} = \hat{i}\,\frac{dR_x}{du} + \hat{j}\,\frac{dR_y}{du} + \hat{k}\,\frac{dR_z}{du} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(22\text{-}1)$$

فمشتقة المتجه هي متجهة مركباته مشتقات اعتيادية تساوي مشتقات مركبات المتجه على التوالي.
من المعادلة (٢٢-١) يتضح أن مشتقة مجموع متجهين تساوي مجموع مشتقة كل منهما، أي :

$$\frac{d}{du}(\vec{A} + \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{du} + \frac{d\vec{B}}{du} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(23\text{-}1)$$

أما مشتقات أنواع الضروب للمتجهات التي تعتمد على المتغير u فهي :

$$\frac{d(m\vec{A})}{du} = \frac{dm}{du}\vec{A} + m\frac{d\vec{A}}{du}$$

$$\frac{d(\vec{A}.\vec{B})}{du} = \frac{d\vec{A}}{du}.\vec{B} + \vec{A}.\frac{d\vec{B}}{du} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(24\text{-}1)$$

$$\frac{d(\vec{A}\times\vec{B})}{du} = \frac{d\vec{A}}{du}\times\vec{B} + \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{du}$$

مثـــال

إذا كان $\vec{A}_1 = 5u^2\,\hat{i} + u\,\hat{j} + u^3\,\hat{k}$ و $\vec{A}_2 = \sin u\,\hat{i} - \cos u\,\hat{j}$ ، جد:

1. $\frac{d}{du}(\vec{A}_1.\vec{A}_2)$

2. $\frac{d}{du}(\vec{A}_1.\vec{A}_1)$

الحل :

1. $\vec{A}_1.\vec{A}_2 = 5u^2 \sin u - u \cos u$

$$\frac{d}{du}(\vec{A}_1.\vec{A}_2) = 10u \sin u + 5u^2 \cos u - \cos u + u \sin u$$

$$= (5u^2 - 1) \cos u + 11u \sin u$$

2. $\vec{A}.\vec{A} = A^2 = 25\,u^4 + u^2 + u^6$

$$\frac{d}{du}(\vec{A}_1.\vec{A}_1) = \frac{d}{du}(A_1^2) = 100u^3 + 2u + 6u^5$$