Ordinary Differential Equations المعادلات التفاضلية الإعتيادية

تعريف المعادلة التفاضلية:- هي جملة رياضية تحوي على المساواة وتحوي على المشتقات أو المفاضلات مع دوال جبرية و دوال متسامية.

حيث إن الدوال الجبرية هي كل متعددة حدود وتفصلها العمليات الأربعة.
أما الدوال المتسامية فهي الدوال المثلثية أو الأسية أو الزائدية أو اللوغارتمية.

بعض الأمثلة على المعادلات التفاضلية:-

$$y'' - x^2 y' = \cos x ....(1)$$

$$\cos x \frac{d^2 y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} = 0 ....(2)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial y} = 9 ....(3)$$

$$Z_{xx} - 2Z_{yx} + Z = e^x ....(4)$$

$$xdy - ydx = \cos xdx ....(5)$$

أنواع المعادلات:-
أ- حسب عدد المتغيرات المستقلة مثل X تكون نوعين :

١- المعادلات التفاضلية الإعتيادية **Ordinary Differential Equations**
وهي المعادلات التي تحوي على متغير مستقل واحد.

٢- المعادلات التفاضلية الجزئية **Partial Differential Equations**
وهي المعادلات التي تحوي على أكثر من متغير مستقل واحد.
حيث معادلتي (3)و(4)هي معادلات جزئية أما بقية المعادلات فهي معادلات إعتيادية.

ب- حسب تصنيف الدرجة والرتبة:حيث إن الرتبة (order) تمثل أعلى مشتقة تظهر في المعادلة.أما الدرجة(degree) فهي القوى الجبرية لأعلى مشتقة.

☺ ملاحظة \ لكل معادلة رتبة ولكن ليس لكل معادلة درجة.

الجواب\ وذلك لإنها أسية فلا يمكن أخذ درجة لها إنما يمكن نشرها نشر تيلر.

على سبيل المثال المعادلة التالية $\sin y' = y^2 - 1$

هي معادلة إعتيادية ومن الرتبة الأولى ولكن ليس لها درجة لأن

$$\sin y' = y' - \frac{1}{3!}(y')^3 + \frac{1}{5!}(y')^5 - \ldots\ldots$$

$$y' - \frac{1}{3!}(y')^3 + \frac{1}{5!}(y')^5 - \ldots\ldots = y^2 - 1$$

ولذلك نلاحظ أنه لايمكن تحديد الدرجة إذن درجتها غير معرفة.

الحل :- هو علاقة بين متغيرات المعادلة وهذه العلاقة يجب أن تحقق المعادلة وان تكون خالية من المشتقات وضمن مدى تعريف المعادلة.

أنواع الحلول :-

هناك أنواع من الحلول وهي الحل العام - الحل الخاص وأيضا الحل المنفرد.ولكل حل خواصه.

على سبيل المثال المعادلة التالية

$$y'' + y = 0 \Leftrightarrow y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

حيث y تمثل الحل العام للمعادلة المعطاة وبما إن المعادلة من الرتبة الثانية فنحصل في الحل العام على ثابتين هما c_1, c_2. وبما أن $c_1, c_2 \in R$ - فإذا كانت قيمة $c_1 = 0, c_2 = 1$

فإن $y = \sin x$ هو الحل الخاص للمعادلة المعطاة مثلا.

☺ إن مجموعة الحل العام للمعادلة تمثل مجموعة منحنيات التكامل ويمثل الحل الخاص أحد منحنيات التكامل لتلك المعادلة - لذلك الحل الخاص هو أحد حلول الحل العام.
أما الحل المنفرد فهو ليس حلا خاصا لذلك هو ليس نتيجة حل عام وإنما له خطوات خاصة به وبالتالي هو يختلف عن الحل العام والحل الخاص.